# Teorie her 1

Rostislav Staněk

February 16, 2014

# Podmínky ukončení předmětu

- Přednášky:
  - Popis hry a způsoby nalezení rovnováhy
  - Ekonomické aplikace
  - V průběhu výkladu se ptejte
- Cvičení:
  - Příklady založené na představených aplikacích
  - Nesmíte být líní přemýšlet

Hodnocení

- Domácí úkoly 30%
- Průběžný test 20%
- Závěrečný test 50%

# Teorie her

- Způsob, jak modelovat situace, kdy dochází ke vzájemným interakcím mezi aktéry
- Aplikace
  - Ekonomie: Konkurence firem, Aukce, Reputace a reklama, Vysvětlení sociálních norem
  - Politologie a právo: Volby, Odpovědnost za škodu
  - Biologie: Sexuální a predátorské chování
- Co teorie her umí?
  - Vysvětlení chování jedinců ve vzájemných interakcích
  - Predikce může být obtížná (preference, více rovnováh)
  - Experimentální testování

# Teorie her II

Lze modelovat různé druhy interakcí

- Strategické a extenzivní hry
- Hry s dokonalými a nedokonalými informacemi
- Kooperativní a nekooperativní hry

Historie

- John von Neumann, Oskar Morgenstern 1944
- John Nash 1950
- John C. Harsanyi, R. Selten, R. Aumann ...

## Hra a její řešení

Hra je popis strategické interakce, který specifikuje akce, které hráči mohou hrát, a jejich zájmy. Řešení hry specifikuje výsledky hry, které mohou nastat.

Strategická a hra se skládá z

- množiny hráčů
- množiny akcí každého hráče
- preferencí každého hráče definovaných nad množinou profilů akcí

## Značení

- $a$ je profil akcí při němž každý hráč $i$ hraje akci $a_i$; tj. $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$
- $(a_i', a_{-i})$ je profil akcí při němž hráč $i$ hraje akci $a_i'$ a každý hráč $j$ kromě hráče $i$ hraje $a_j$ (index $-i$ tedy znamená všichni kromě hráče $i$)
- $u_i(a)$ značí výplatu hráče $i$ při profilu akcí $a$

# Racionalita a preference

Předpokládáme, že hráči jsou racionální.

- Hráči mají preference ohledně profilů akcí, tzn. umí srovnat jakékoliv dva výsledky hry (úplnost).
- Preference jsou tranzitivní, tzn. $(A \succ B) \wedge (B \succ C) \Rightarrow (A \succ C)$
- Preference můžeme definovat pomocí výplatní (užitkové funkce).
  - $A \succ B \succ C \Rightarrow u_i(A) > u_i(B) > u_i(C)$
  - Výplatní funkce je ordinální

Racionální hráči si vybírají nejpreferovanější variantu z dostupných možností. Tzn. maximalizují svou výplatní funkci při daných omezeních.

# Věžňovo dilema

- Hráči jsou dva podezřelí 1 a 2.
- Každý hráč má na výběr akce zradit, spolupracovat zkráceně D,C
- Preference podezřelého 1 jsou $(D, C) \succ (C, C) \succ (D, D) \succ (C, D)$, kde např. $(D, C)$ znamená, že hráč 1 zradí zatímco hráč 2 spolupracuje. Preference podezřelého 2 jsou $(C, D) \succ (C, C) \succ (D, D) \succ (D, C)$.

| | D | C |
|---|---|---|
| D | 1,1 | 3,0 |
| C | 0,3 | 2,2 |

Table: Věžňovo dilema

# Bach nebo Stravinsky, Bitva pohlaví

| | B | S |
|---|---|---|
| B | 2,1 | 0,0 |
| S | 0,0 | 1,2 |

Table: Bitva pohlaví

# Lov jelena

| | S | H |
|---|---|---|
| S | 2,2 | 0,1 |
| H | 1,0 | 1,1 |

Table: Lov jelena

# Hlava nebo orel

| | T | H |
|---|---|---|
| T | 1,-1 | -1,1 |
| H | -1,1 | 1,-1 |

Table: Hlava nebo orel

# Nashova rovnováha: definice

Profil akcí $a^*$ strategické hry je Nashovou rovnováhou, pokud pro každého hráče $i$ a každou jeho akci $a_i$ platí $u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a^*_{-i})$.

Nashova rovnováha představuje situaci, kdy si žádný hráč nemůže polepšit jednostrannou změnou strategie.

Striktní Nashova rovnováha $u_i(a^*) > u_i(a_i, a^*_{-i})$

# Nashova rovnováha: interpretace

- Každý hráč si volí akci, která mu přináší nejvyšší výplatu při daných přesvědčeních ohledně akcí ostatních hráčů.
- Přesvědčení každého hráče o akcích, které budou hrát ostatní jsou správná.

Dvě možné interpretace dle toho jak se tvoří očekávání o akcích ostatních hráčů

- Hráči se zvykem, opakováním, evolučním procesem dostali do Nashovy rovnováhy
- Hráči jsou neomezeně racionální

# Optimální odpověď

Jiný způsob nalezení Nashovy rovnováhy

Optimální odpověď hráče $i$ označíme jako $B_i$ a definujeme jako $B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a_{-i}) \geqq u_i(a_i^{'}, a_{-i}) \forall a_i \in A_i\}$

Profil akcí $a^*$ je Nashovou rovnováhou právě tehdy, když akce každého hráče je optimální odpovědí na akce ostatních hráčů. Tedy $a_i^* \in B_i(a_{-i}^*), \forall i$

# Optimální odpověď - příklad

| | L | C | R |
|---|---|---|---|
| T | $1,2^*$ | $2^*,1$ | $1^*,0$ |
| M | $2^*,1^*$ | $0,1^*$ | $0,0$ |
| B | $0,1$ | $0,0$ | $1^*,2^*$ |

# Dominované a dominující akce

Při hledání Nashovy rovnováhy si můžeme ulehčit situaci pomocí konceptu striktně dominovaných akcí.

Akce $a_i^{'}$ striktně dominuje akci $a_i^{''}$, pokud přináší vyšší výplatu bez ohledu na to, jaké akce hrají ostatní hráči, tj. $u_i(a_i^{'}, a_-i) > u_i(a_i^{''}, a_-i), \forall a_{-i}$. $a_i^{''}$ je striktně dominovaná akce

Striktně dominovaná akce nemůže nikdy být optimální odpovědí a nemůže být v profilu akcí tvořící Nashovu rovnováhu. Pozor, neplatí pro slabě dominované akce. Přesto se někdy předpokládá, že hráči nehrají slabě dominované akce.

## Dominované a dominující akce - příklad: Beauty contest

Zvolte číslo od 0 do 100. Z vybraných čísel se spočítá průměr. Kdo bude nejblíže $\frac{2}{3}$ průměru vyhrává.

# Dominované a dominující akce - příklad: Beauty contest

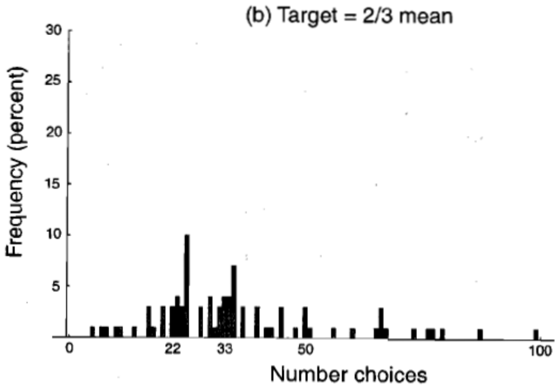


*Figure 5.1.* *Beauty contest choices. Sources: Based on data from Nagel (1999) and Camerer, Ho, and Weigelt (unpublished).*

## Symetrické hry

Symetrické hry slouží k modelování her identických hráčů

Strategická hra o dvou hráčích je symetrická, pokud množina akcí je stejná a preference hráčů jsou reprezentovány výplatní funkcí pro niž platí $u_1(a_1, a_2) = u_2(a_2, a_1)$, $\forall (a_1, a_2)$

| | B | S |
|---|---|---|
| B | x,x | z,w |
| S | w,z | y,y |

Table: Symetrická hra

# Cournotův model oligopolu

- Stejný výrobek je vyráběn $n$ firmami. Firmy mohou určovat vyráběné množství $q_i$. Náklady dány funkcí $C_i(q_i)$
- $P(Q)$ inverzní poptávková funkce a cena je dána rovnicí $P(q_1 + q_2 + ... + q_n)$
- Zisk firmy $i$ je $\pi_i = q_i P(q_1 + q_2 + ... + q_n) - C_i(q_i)$

Jak vypadá řešení pro případ dvou firem s konstantními náklady a lineární inverzní poptávkovou funkcí $P = \alpha - Q$?