Opakované hry: Věžňovo dilema

Rostislav Staněk

April 28, 2014

Opakované hry

Opakovaná hra se skládá z opakovaní stejné strategické hry.

Oproti jednorázovým hrám ale existují strategické vazby mezi jednotlivými koly.

Akce hráčů jsou podmíněny tím, co se dělo v minulosti.

Hráči mohou být "odměněni" nebo "trestáni" v dalších kolech

Preference

Výsledek opakované hry je oceněn jako diskontovaná suma výplat z jednotlivých strategických her. Výplaty v jednotlivých kolech jsou tzv. separabilní.

Označme výplatní funkcí pro danou strategickou hru u_i a diskontní faktor $\delta_i \in < 0, 1 >$.

Sekvence profilů akcí $(a^1, a^2, ..., a^T)$ je oceněna

$$u_i(a^1) + \delta_i u_i(a^2) + \delta^2 u_i(a^3) + ... + \delta^{T-1} u_i(a^T) = \sum_{t=1}^{T} \delta_i^{t-1} u_i(a^t)$$

Preference v nekonečně opakované hře

Sekvence profilů akcí $(a^1, a^2, \ldots)$ je oceněna

$$u_i(a^1) + \delta_i u_i(a^2) + \delta^2 u_i(a^3) + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta_i^{t-1} u_i(a^t)$$

Diskontovaný průměr výplat $(1-\delta)V$
Hráč je indiferentní mezi $(c, c, \ldots)$ a $(w^1, w^2 \ldots)$

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \delta_i^{t-1} w^t = \frac{c}{1-\delta} \Rightarrow c = (1-\delta)V$$

Diskontní faktor

Proč je $\delta \in < 0, 1 >$?

- Lidé jsou netrpěliví
- Hra může v každém kole skončit s kladnou pravděpodobností
- Pokud je výplata měřena v penězích, pak diskontní faktor může odrážet kladnou reálnou úrokovou sazbu

Definice

G je strategická hra.

- Množina hráčů je N
- Množina konečných historií je množina sekvencí $(a^1, a^2, ..., a^T)$, kde a^t je profil akcí v G
- Hráčská funkce připisuje každé historii $(a^1, ..., a^t)$ všechny hráče
- Množina akcí dostupná každému hráči po jakékoliv historii je A_i
- Hráči hodnotí dle konečnou historii $(a^1, a^2, ..., a^T)$ dle své sumy výplat $\sum_{t=1}^{T} \delta_i^{t-1} u_i(a^t)$ nebo diskontovaného průměru výplat $(1-\delta) \sum_{t=1}^{T} \delta_i^{t-1} u_i(a^t)$

Opakované hry a extenzivní hry

- Strategie v konečné opakované hře specifikuje jakou akci hráč hraje na začátku hry a po jakékoliv sekvenci $(a^1, ..., a^t)$
- Opakovanou hru lze chápat jako extenzivní hru se simultánními tahy. Nashova rovnováha i SPE jdou definovány jako v extenzivní hře.

Strategie jako automata

Strategií v nekonečně opakovaných hrách může být velmi mnoho. Omezíme se proto na tzv. automata. (stacionární strategie), ve kterých hráč reaguje na určitou sekvenci profilů vždy stejně.

Automat se skládá z:

- určitého počtu stavů
- funkce, která každému stavu připisuje akci, která bude hrána
- přechodové funkce, která na základě minulého stavu a výseldku hry posune automat do nového stavu

Konečně opakované vězňovo dilema

Jedinou Nashovou rovnováhou i SPE je profil akcí (D, D) v každé periodě.

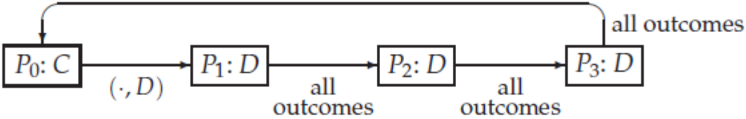
Lze dokázat zpětnou indukcí

Strategie v nekonečně opakovaném vězňově dilematu

- Grimm-trigger
- Tit-for-tat

Figure: Tit for tat strategie

- Omezený trest



Nashova rovnováha

Je situace v níž všichni hrají grimm-trigger strategii Nashovou rovnováhou?

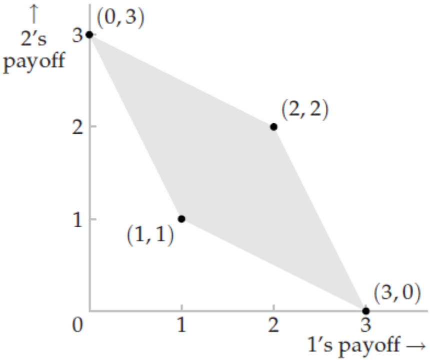
V rovnováze hráč získá (2,2,2,...). Při odchýlení (3,1,1,...). Diskontovaný průměr výplat v případě odchýlení je

$$(1-\delta)(3+\delta+\delta^2+\delta^3+\ldots)=(1-\delta)(3+\frac{\delta}{1-\delta})=3(1-\delta)+\delta$$

Grimm-trigger je Nashova rovnováha, pokud $3(1-\delta)+\delta \leqq 2$.

Dosažitelné výplaty

Množina dosažitelných výplat je množina všech vážených průměrů výplat z jednotlivých profilů akcí jednokolové strategické hry, kde váhy jsou dány počtem výskytů výplaty v sekvenci.



Folk teorém

- Pro jakýkoli diskontní faktor je průměrná diskontovaná výplata každého hráče v Nashově rovnováze alespoň $u_i(D, D)$.
- (x_1, x_2) je dosažitelný pár výplat v G, pro který platí $x_i > u_i(D, D)$. Vždy existuje $\overline{\delta} < 1$ takový, že pokud $\delta > \overline{\delta}$, pak existuje v G Nashova rovnováha ve které průměrná diskontovaná výplata hráče i je x_i.

Folk teorém

Trajektorie výstupů se skládá z opakování $(a^1, ..., a^k)$. Označme tuto trajektorii $(b^1, b^2 ...)$, kde b^{qk+t} pro $q = 0, 1, ...$ a $t = 1, ..., k$.

Strategie hráčů je grimm-trigger.
Tato strategie je Nashovou rovnováhou, protože

	l	$l+1, ..., k$	$1, ..., k$	$1, ..., k$
s_1	$u_1(a^l)$	$u_1(a^{l+1}), ..., u_1(a^k)$	$> u_1(D, D)$	$> u_1(D, D)$
odchýlení	v^l	$u_1(D, D), ..., u_1(D, D)$	$u_1(D, D)$	$u_1(D, D)$

Table: Nashova rovnováha v nekonečně opakované hře

SPE a one-deviation

Profil strategií v nekonečně opakované hře je SPE, pokud splňuje tzv. **one-deviation** vlastnost. Tj. pokud žádný hráč nemůže zvýšit svou výplatu, pokud se odchýlí na začátku jakékoliv podhry, ve které je první hráčem na tahu, při daných strategiích ostatních hráčů a zbytku své strategie.

Pro nekonečné hry platí, jen pokud je $\delta < 1$.

SPE

Grim-trigger strategie (definovaná výše) tvoří SPE, pokud $\delta \geqq \frac{1}{2}$

- Podhra po historii (C,C). Grimm-trigger je optimální, pokud $3(1-\delta)+\delta \leqq 2$
- Podhra po jiné historii. Odchýlení není výhodné, protože $u_1(C,D) < u_1(D,D)$ a volba C neovlivní další kola.

Folk teorém

- Pro jakýkoli diskontní faktor je průměrná diskontovaná výplata každého hráče v SPE alespoň $u_i(D, D)$.
- (x_1, x_2) je dosažitelný pár výplat v G, pro který platí $x_i > u_i(D, D)$. Vždy existuje $\overline{\delta} < 1$ takový, že pokud $\delta > \overline{\delta}$, pak existuje v G SPE ve které průměrná diskontovaná výplata hráče i je x_i.