Smíšené strategie

Rostislav Staněk

February 24, 2014

Motivace

	T	H
T	1,-1	-1,1
H	-1,1	1,-1

Table: Hlava nebo orel

Hra nemá Nashovu rovnováhu, pokud hráči mohou hrát deterministicky jednu akci. Co když jim dovolíme, aby hráli různé akce s různou pravděpodobností?

Strategická hra se smíšenými strategiemi

Smíšenou strategií hráče ve strategické hře je pravděpodobnostní rozdělení nad množinou jeho akcí. Značíme jej α_i, $\alpha_i(a_i)$ je pravděpodobnost jakou připisuje strategie hráče i akci a_i.

Strategická hra s vNM preferencemi se skládá z

- množiny hráčů
- množiny akcí každého hráče
- preferencí každého hráče definovaných nad množinou loterií složených z profilů akcí takových, že mohou být reprezentovaný očekávanou (střední) hodnotou Bernoulliho výplatní funkce

von Neumann-Morgensternovi preference

- Při smíšených strategiích nemusí být výsledkem hry jeden profil akcí, ale různé výsledky mohou nastat s různou pravděpodobností. Takovou situaci nazýváme loterie.
- Předpokládáme, že hráči mají preference ohledně loterií (vNM preference) složených z výsledků hry. Jakým způsobem můžeme takové preference reprezentovat?
- Pokud se hráči chovají konzistentně (nepodléhají Dutch book), pak můžeme jednotlivé deterministické výsledky reprezentovat takovou výplatní funkcí (Bernoulliho), že hráči hodnotí loterie podle očekávané výplaty

von Neumann-Morgensternovi preference

- Bernoulliho výplatní funkce nejsou zcela ordinální
- Bernoulliho výplatní funkce $u(a)$ a $v(a)$ reprezentují stejné preference, pokud platí, že $u(a) = \alpha + \beta v(a)$, $\forall a$

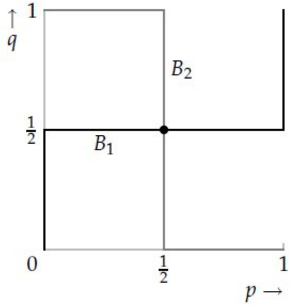
Nashova rovnováha ve smíšených strategiích

Profil smíšených strategií α^* ve strategické hře s vNM preferencemi je Nashovou rovnováhou, pokud pro každou smíšenou strategii α_i každého hráče i platí $U_i(\alpha^*) \geqq U_i(\alpha_i, \alpha^*_{-i})$, kde $U_i(\alpha)$ představuje očekávanou výplatu hráče i ze smíšeného profilu akcí α.

Každá strategická hra s konečným počtem akcí má Nashovu rovnováhu ve smíšených strategiích.

Jak ji ale najít?

Nashova rovnováha ve smíšených strategiích: Optimální odpovědi ve hře hlava nebo orel



Základní vlastnost smíšených strategií

	L(q)	R(1-q)
T(p)	pq	$p(1-q)$
B(1-p)	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Table:

Očekávanou výplatu hráče 1 tak můžeme zapsat jako

$$pqu_1(T,L)+p(1-q)u_1(T,R)+q(1-p)u_1(B,L)+(1-p)(1-q)u_1(B,R) =$$

$$= p[qu_1(T,L)+(1-q)u_1(T,R)]+(1-p)[qu_1(B,L)+(1-q)u_1(B,R)] =$$

$$= pE_1(T,\alpha_2)+(1-p)E_1(B,\alpha_2))$$

Základní vlastnost smíšených strategií

Zobecnění: $U_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i(a_j) E_i(a_j, \alpha_{-i})$

α^* je Nashovou rovnováhou právě tehdy, když

- očekávaná výplata každé akce, které připisuje strategie α_i^* kladnou pravděpodobnost, je pří daných strategiích α_{-i}^* stejná
- očekávaná výplata každé akce, které připisuje strategie α_i^* nulovou pravděpodobnost, není pří daných strategiích α_{-i}^* vyšší než očekávaná výplata akce, které je připsána kladná pravděpodobnost.

Vyškrtání Dominovaných akcí

Ve strategické hře s vNM preferencemi hráčova strategie α_i ostře dominuje jeho akci a_i', pokud pro všechny akce ostatních hráčů a_{-i} platí $U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$. Akce a_i' je ostře dominovaná.

	L	R
T	3,1	0,1
C	0,3	3,2
B	1,1	1,0

Table: Hlava nebo orel

Nashova rovnováha ve smíšených strategiích: interpretace

- Lidé se rozhodují náhodně. Proč? Ukázka
- Zastoupení jednotlivých strategií v populaci (tzv. purifiacation)
- Odrážejí faktory ovlivňující chování, které nejsou zahrnuty v modelu

Ilustrace: Volání policie neboli Samaritán

- Hráči: n lidí
- Akce: $a_i = \{\text{volat,nevolat}\}$
- Preference: 0 nikdo nevolá, $v - c$ já volám, v někdo jiný volá, $v > c$

Smíšená rovnováha: výplaty z akcí se musí rovnat. p značí pravděpodobnost s níž každý zavolá. Pravděpodobnost, že nikdo jiný nezavolá je $(1-p)^{n-1}$.

$$v - c = (1-p)^{n-1}0 + (1-(1-p)^{n-1})v \Rightarrow (1-p)^{n-1} = \frac{c}{v}$$

$$p = 1 - (\frac{c}{v})^{\frac{1}{n-1}}$$

Ilustrace: Volání policie neboli Samaritán

Každý člověk volá s pravděpodobností $p = 1 - (\frac{c}{v})^{\frac{1}{n-1}}$. S rostoucím n se snižuje pravděpodobnost, že člověk zavolá.

Jak se mění pravděpodobnost, že alespoň někdo zavolá.

$$Pr\{\text{nikdo nezavolá}\} = Pr\{\text{i nezavolá}\}Pr\{\text{nikdo jiný nezavolá}\}$$

$$Pr\{\text{nikdo nezavolá}\} = (\frac{c}{v})^{\frac{1}{n-1}}\frac{c}{v}$$

S rostoucím počtem, lidí klesá pravděpodobnost, že kdokoliv zavolá policii.

Ilustrace: Expertní hra

π...zisk experta při pravdivém reportu; π'...prodá velkou opravu při existenci malé; r...pravděpodobnost existence velkého problému; E...platba za velkou opravu; I...platba za malou opravu; E',I'...stejná platba u druhého experta; platí $E > I, E' > E, I' > I$

	Přijme velkou opravu(q)	Odmítne velkou opravu(1-q)
Pravda(p)	$\pi, \ -rE - (1-r)I$	$(1-r)\pi, \ -rE' - (1-r)I$
Lež(1-p)	$r\pi + (1-r)\pi', \ -E$	$0, \ -rE' - (1-r)I'$

Table: Expertní odhad

Ilustrace: Expertní hra: rovnováha

1. Pokud $E < rE' + (1-r)I'$, pak je (Lži,Příjmy velkou opravu) Nashovou rovnováhou
2. Pokud $E > rE' + (1-r)I'$ pak je Nashovou rovnováhou (p^*, q^*), kde

$$p^* = \frac{E - (rE' + (1-r)I')}{(1-r)(E-I')} = 1 - \frac{r(E-E')}{(1-r)(E-I')}$$

$$q^* = \frac{\pi}{\pi'}$$

Jak se mění chování se změnou r?