Opakované hry

Rostislav Staněk

May 13, 2013

SPE a one-deviation

Profil strategií v nekonečně opakované hře je SPE, pokud splňuje tzv. **one-deviation** vlastnost. Tj. pokud žádný hráč nemůže zvýšit svou výplatu, pokud se odchýlí na začátku jakékoliv podhry, ve které je první hráčem na tahu, při daných strategiích ostatních hráčů a zbytku své strategie.

Pro nekonečné hry platí, jen pokud je $\delta < 1$.

SPE

Grim-trigger strategie (definovaná výše) tvoří SPE, pokud $\delta \geqq \frac{1}{2}$

- Podhra po historii (C,C). Grimm-trigger je optimální, pokud $3(1-\delta)+\delta \leqq 2$
- Podhra po jiné historii. Odchýlení není výhodné, protože $u_1(C,D) < u_1(D,D)$ a volba C neovlivní další kola.

Folk teorém

- Pro jakýkoli diskontní faktor je průměrná diskontovaná výplata každého hráče v SPE alespoň $u_i(D, D)$.
- (x_1, x_2) je dosažitelný pár výplat v G, pro který platí $x_i > u_i(D, D)$. Vždy existuje $\overline{\delta} < 1$ takový, že pokud $\delta > \overline{\delta}$, pak existuje v G SPE ve které průměrná diskontovaná výplata hráče i je x_i.

Minmax výplata

Ve vězňově dilematu nemohla průměrná diskontovaná výplata v rovnováze klesnout pod $u_i(D, D)$.

Obecně nemůže průměrná diskontovaná výplata v rovnováze klesnout pod minmaxovou výplatu, definovanou následovně:

$$\min_{a_{-i} \in A_{-i}} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i})$$

Minmax výplata

Najděte minmaxovou výplatu v následující hře.

	A	B	C
A	4,4	3,0	1,0
B	0,3	2,2	1,0
C	0,1	0,1	0,0

Folk teorém pro Nashovu rovnováhu

- Pro jakýkoliv diskontní faktor je průměrná diskontovaná výplata každého hráče v Nashově rovnováze alespoň jeho minmax výplata.
- x je dosažitelný profil výplat v G, pro který platí, že x_i je větší než minmax výplata hráče i. Pak vždy existuje $\overline{\delta} < 1$, taková že pro každé $\delta > \overline{\delta}$ má nekonečně opakovaná hra Nashovu rovnováhu ve které průměrná diskontovaná výplata hráče i je x_i.

Folk teorém pro Nashovu rovnováhu

$s_i(\varnothing) = b_i$

$$s_i(h) = \begin{cases} b_i & \text{pokud } (a^1, ...a^{t-1}) = (b, ..., b) \\ (p_{-j})_i & \text{pokud } (a^1, ...a^{t-1}) \neq (b, ..., b) \text{hráč } j \text{ se sám odchýlil} \end{cases}$$

kde $(p_{-j})_i$ označuje takovou strategii hráče i, která přináší hráči j minmax výplatu.

Profil těchto strategií tvoří Nashovu rovnováhu, pokud jsou hráči dostatečně trpělivý.

SPE

Výše uvedená strategie nemusí být kredibilní. Netvoří proto SPE.

Uvažujme následující příklad

	A	B	C
A	4,4	1,5	1,0
B	5,1	3,3	1,0
C	0,1	0,1	0,0

SPE strategie

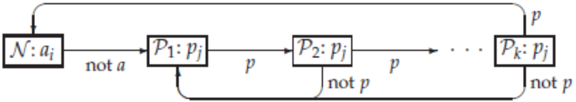

Figure: SPE strategie

Důkaz SPE

Označme $\overline{u}_i$ maximální výplata ve hře, $u_i(p)$ výplata při profilu akcí (p_1, p_2), $u_i(a)$ výplata při dodržení strategie

- Podhra vedoucí do stavu N.

$$u_i(a)(1+\delta+\ldots+\delta^k) \geqq \overline{u}_i + u_i(p)(\delta+\ldots+\delta^k)$$

- Podhra vedoucí do některého ze stavů P_l.

$$u_i(p)(1+\delta+\ldots+\delta^{k-l})+u_i(a)(\delta^{k-l+1}\ldots+\delta^k) \geq m_i+u_i(p)(1+\delta\ldots+\delta^k)$$

Pokud je tato podmínka splněna, pro $l = 1$, pak je jistě splněna také pro $l > 1$. $\delta^k(u_i(a) - u_i(p)) \geqq m_i - u_i(p)$

Důkaz SPE

Lze najít $\overline{\delta}$ a funkci $\overline{k}$ takové, že pro $\delta > \overline{\delta}$ a $k = \overline{k}(\delta)$ jsou výše uvedené podmínky splněny.

Vyjednávání

Rubinstein, Ariel (1982). Perfect Equilibrium in a Bargaining Model

- Hráči: 1 a 2
- Konečné historie: jakákoliv skevence typu $(x^1, N, x^2, N, ..., x^t, Y)$, kde x^r je dvojice čísel, jejichž součet je jedna
- Hráčská funkce: $P(\emptyset) = 1$,

$$P((x^1, N, x^2, N, ..., x^t) = P(x^1, N, x^2, N, ..., x^t, N) = \begin{cases} 1 & \text{t je liché} \\ 2 & \text{t je sudé} \end{cases}$$

- Preference: Výplata hráče při konečné historii je $(x^1, N, x^2, N, ..., x^t, Y)$ je $\delta_i^{t-1} x_i^t$. Výplata při nekonečné historii je $(x^1, N, x^2, N, ...)$ je 0.