Strategické hry a Nashova rovnováha: Ilustrace

Rostislav Staněk

February 25, 2013

Připomenutí

- Hra: hráči, akce, preference
- Nashova rovnováha: definice, optimální odpovědi, dominované akce
- Nash ve filmu Čistá duše

Obsah

- Modely oligopolu
- Aukce
- Volby
- Stanovení odpovědnosti za škodu

Cournotův model

- Stejný výrobek je vyráběn n firmami. Firmy mohou určovat vyráběné množství q_i. Náklady dány funkcí $C_i(q_i)$
- $P(Q)$ inverzní poptávková funkce a cena je dána rovnicí $P(q_1 + q_2 + ... + q_n)$
- Zisk firmy i je $\pi_i = q_i P(q_1 + q_2 + ... + q_n) - C_i(q_i)$

Cournotův model

Jak vypadá řešení pro případ dvou firem s konstantními náklady a lineární poptávkovou funkcí?

Optimální odpovědi získáme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= \alpha - 2q_1 - q_2 - c = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} &= \alpha - 2q_2 - q_1 - c = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Nashova rovnováha je $(q_1^*, q_2^*) = (\frac{1}{3}(\alpha - c), \frac{1}{3}(\alpha - c))$

Cournotův model s n firmami

Optimální odpovědi tvoří soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
\alpha - 2q_1 - q_2 - q_3 - \ldots - q_n - c &= 0 \\
\alpha - q_1 - 2q_2 - q_3 - \ldots - q_n - c &= 0 \\
&\vdots \\
\alpha - q_1 - q_2 - q_3 - \ldots - 2q_n - c &= 0
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Cournotův model s n firmami

Odečtením první rovnice od druhé získáme

$$-q_1 + q_2 = 0$$

Opakováním postupu zjistíme, že všechny firmy vyrábí stejné množství, označme jej q^*.
Každá rovnice se redukuje na tvar

$$\alpha - c - (n+1)q^* = 0$$

Nashova rovnováha je $\left(\frac{\alpha-c}{n+1}, \dots, \frac{\alpha-c}{n+1}\right)$

Bertrandův model

- Hráči: Firmy 1 a 2
- Množinou akcí: Ceny, které může firma stanovit. Ceny chápeme jako spojitou proměnou, tj. $A_i = R^+$
- Preference: Jsou reprezentovány ziskem. m je počet firem s nejnižší cenou.

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{(p_i - c)D(p_i)}{m} & \text{pokud } p_i \leqq p_j, \forall j \\ 0 & \text{pokud } p_i > p_j \end{cases} \tag{3}$$

Bertrandův model pro 2 identické firmy

Nashovou rovnováhou je profil $(p_1^*, p_2^*) = (c, c)$

Žádná další situace není Nashovou rovnováhou

- $p_1 < c$, $p_2 < c$ zisk firmy, jejíž cena je nižší, je záporný
- $p_1 \leq c, p_2 > c$ firma 1 může zvýšit svůj zisk, pokud stanoví cenu mezi c a p_2.
- $p_1 > c, p_2 > c$ a $p_1 > p_2$. Firma 1 může zvýšit svůj zisk, pokud sníží cenu těsně pod p_2.

Aukce

Způsob, jak alokovat nějaký objekt a zjistit jeho cenu.

- First-price aukce, Holandská aukce
- Second-price aukce, Anglická aukce
- All pay aukce
- Aukce s více objekty
  - Diskriminační aukce
  - Aukce s jednotnou cenou
  - Vickrey aukce

Second-price aukce

- Hráči: n hráčů, kde $n \geqq 2$. Hráč i si cení dražený objekt na v_i. Předpokládáme, že $v_1 > v_2 > ... > v_n$ V případě stejného bidu získá objekt hráč s nižším indexem.
- Množina akcí: možné nabídky každého hráče b_i, $b_i \geqq 0$
- Preference: $v_i - \overline{b}$, pokud hráč i nabídl nejvyšší nabídku, jinak 0

Second-price aukce: Slabě dominující akce

Nabídnout v_i je slabě dominantní akce

	$\overline{b} \leqq b_i$	$b_i < \overline{b} < v_i$	$\overline{b} > v_i$
$b_i < v_i$	$v_i - \overline{b}$	0	0
v_i	$v_i - \overline{b}$	$v_i - \overline{b}$	0

	$\overline{b} \leqq v_i$	$b_i > \overline{b} > v_i$	$\overline{b} > b_i$
$b_i > v_i$	$v_i - \overline{b}$	$v_i - \overline{b}(< 0)$	0
v_i	$v_i - \overline{b}$	0	0

First-price aukce

- Hráči: n hráčů, kde $n \geqq 2$. Předpokládáme $v_1 > v_2 > ... > v_n$
- Množina akcí: možné nabídky každého hráče b_i, $b_i \geqq 0$
- Preference: $v_i - b_i$

Ve first-price aukci se všechny Nashovy rovnováhy vyznačují tím, že objekt obdrží hráč, který si jej cení nejvíce.

1. $b_i > b_1$ a $b_i > v_2$
2. $b_i > b_1$ a $b_i \leqq v_2$

First-price aukce

Pokud jsou ceny spojité, pak v každé Nashově rovnováze, hraje některý z hráčů slabě dominovanou akci.

1. $b_i > v_i$ je slabě dominovaná v_i
2. $b_i = v_1$ je slabě dominovaná $b_i < v_i$
3. $(b_1, b_2, \ldots)$, kde $b_1 < v_1$ a $b_2 < v_2$ není Nashova rovnováha

Předpokládejme, že ceny jsou diskrétní. Profil $(v_2 - \epsilon, v_2 - \epsilon, b_3, \ldots, b_n)$ je Nashovou rovnováhou, kde žádný z hráčů nehraje slabě dominovanou akci.

Hotellingův model

- Hráči: n politických stran
- Množina akcí: $x_i \in (0, 1)$, x_i je pozice strany.
- Preference: n vítězné straně; $n - k$ straně, která se dělí o první místo s k soupeři; 0 straně, která nevyhrála.

Pozici mediánového voliče označíme m.

Hotellingův model: optimální odpovědi

Předpokládejme, že $n = 2$.

$$B_1(x_2) = \begin{cases} \{x_1 : x_2 \lneqq x_1 \lneqq 1 - x_2\} & \text{pokud } x_2 \lneqq m \\ \{m\} & \text{pokud } x_2 = m \\ \{x_1 : 1 - x_2 \lneqq x_1 \lneqq x_2\} & \text{pokud } x_2 \gneqq m \end{cases}$$

$$B_2(x_1) = \begin{cases} \{x_2 : x_1 \lneqq x_2 \lneqq 1 - x_1\} & \text{pokud } x_1 \lneqq m \\ \{m\} & \text{pokud } x_1 = m \\ \{x_2 : 1 - x_1 \lneqq x_2 \lneqq x_1\} & \text{pokud } x_1 \gneqq m \end{cases} \tag{4}$$

Odpovědnost za škodu

- Hráči: škůdce 1 a poškozený 2
- Akce: Úsilí $a_i \in R$ vynaložené na odvrácení škody
- Preference: $u_1(a_1, a_2) = -a_1 - \rho(a_1, a_2)L(a_1, a_2)$
  $u_2(a_1, a_2) = -a_2 - (1 - \rho(a_1, a_2))L(a_1, a_2)$
  $\rho(a_1, a_2)$ stanovuje jakou část škody zaplatí škůdce a $L(a_1, a_2)$ je velikost škody, která je klesající v a_1 a a_2.

Budeme uvažovat následující pravidlo:

$$\rho(a_1, a_2) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a_1 < X_1 \wedge a_2 \geqq X_2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Odpovědnost za škodu

Chceme dosáhnou společensky optimálního výsledku $(\widehat{a_1}, \widehat{a_2})$, který $\max -a_1 - a_2 - L(a_1, a_2)$. Jaké X_1 a X_2 máme stanovit?

Ukážeme, že při $(X_1, X_2) = (\widehat{a_1}, \widehat{a_2})$ je Nashova rovnováha efektivní. Tzn. ukážeme, že $(\widehat{a_1}, \widehat{a_2})$ tvoří Nashovu rovnováhu

Odpovědnost za škodu: škůdce

Předpokládejme $a_2 = \widehat{a_2}$

$$u_1(a_1, \widehat{a_2}) = \begin{cases} -a_1 - L(a_1, \widehat{a_2}) & \text{pokud } \widehat{a_1} > a_1 \\ -a_1 & \text{pokud } \widehat{a_1} \leqq a_1 \end{cases}$$

1. Pokud $a_1 = \widehat{a_1}$, pak $u_1(\widehat{a_1}, \widehat{a_2}) = -\widehat{a_1}$
2. Pokud $a_1 > \widehat{a_1}$, pak $u_1(a_1, \widehat{a_2}) = -a_1 < -\widehat{a_1}$
3. Pokud $a_1 < \widehat{a_1}$, pak $u_1(a_1, \widehat{a_2}) = -a_1 - L(a_1, \widehat{a_2}) < -\widehat{a_1}$, protože $\widehat{a_1}$ maximalizuje $-a_1 - \widehat{a_2} - L(a_1, \widehat{a_2})$

Odpovědnost za škodu: poškozený

Předpokládejme $a_1 = \widehat{a_1}$

$$u_2(\widehat{a_1}, a_2) = -a_2 - L(\widehat{a_1}, a_2)$$

Víme, že $\widehat{a_2}$ maximalizuje $-\widehat{a_1} - a_2 - L(\widehat{a_1}, a_2)$ a tudíž i $-a_2 - L(\widehat{a_1}, a_2)$.

$(\widehat{a_1}, \widehat{a_2})$ je Nashova rovnováha

Odpovědnost za škodu

$(\widehat{a_1}, \widehat{a_2})$ je jediná Nashova rovnováha
Optimální odpověď škůdce je

$$B_1(a_2) = \begin{cases} \widehat{a_1} & \text{pokud } a_2 = \widehat{a_2} \\ 0 & \text{pokud } a_2 < \widehat{a_2} \\ a_1 \in (0, \widehat{a_1}) & \text{pokud } a_2 > \widehat{a_2} \end{cases}$$

Jaká je optimální odpověď poškozeného pro $a_1 < \widehat{a_1}$?

$$u_2(a_1, a_2) = \begin{cases} -a_2 - L(a_1, a_2) & \text{pokud } a_2 < \widehat{a_2} \\ -a_2 & \text{pokud } a_2 \geqq \widehat{a_2} \end{cases}$$

Odpovědnost za škodu

1. Poškozený nebude chtít hrát $a_2 > \widehat{a_2}$, protože v takovém případě $u_2(a_1, a_2) = -a_2 < -\widehat{a_2}$
2. V případě $a_2 < \widehat{a_2}$ obdrží hráč výplatu $-a_2 - L(a_1, a_2)$. Platí následující
   $-a_2 - L(a_1, a_2) < -a_2 - L(\widehat{a_1}, a_2) \leqq -\widehat{a_2} - L(\widehat{a_1}, \widehat{a_2}) \leqq -\widehat{a_2}$