Strategické hry s nedokonalými informacemi

Rostislav Staněk

March 31, 2014

Nedokonalé informace

Hráči neví něco o hře, kterou hrají (neznají např. preference jiných hráčů) Hráči si jsou ovšem vědomi jaké jsou varianty hry, neumí je ovšem rozlišit.

- Stavy světa popisují možné alternativy hry
- Hráč neví v jakém stavu světa se nachází
- Každému stavu světa připisuje určitou pravděpodobnost

Definice hry

- Množina hráčů
- Množina stavů světa Ω
- Množina akcí každého hráče
- Pro každého hráče množina možných signálů $\{t_i\}$ a signální funkce $\tau_i : \Omega \rightarrow \{t_i\}$, která stavu světa přiřazuje určitý signál
- Pro každého hráče a pro každý signál systém přesvědčení ohledně stavů světa konzistentní se signálem, tj. rozdělení pravděpodobností nad množinou stavů světa konzistentních se signálem
- Bernoulliho výplatní funkce nad množinou (a, ω), kde a je profil akcí a ω je stav světa

Přesvědčení hráčů

$AP(\omega)$ je apriorní pravděpodobnost, že nastane stav světa omega

Pokud je stav světa konzistentní se signálem t_i, pak hráč upraví svá očekávání podle Bayesova vzorce

$$P(\omega) = \frac{AP(\omega)}{\sum_{\omega \in \tau^{-1}(t_i)} AP(\omega))}$$

Stavům světa, které nejsou konzistentní se signálem t_i, připisuje hráč pravděpodobnost 0.

Předpokládáme, že hráči mají stejné apriorní pravděpodobnosti. (Harsanyiova doktrína)

Příklad - Bitva pohlaví

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

Table: potkat se

	B	S
B	2,0	0,2
S	0,1	1,0

Table: vyhnout se

Nashova rovnováha

Hráč může volit odlišnou akci pro každý signál, který obdrží. S každým hráčem různého typu budeme zacházet jako se samostatným hráčem.

- Hráči jsou dáni množinou (i, t_i)
- Množina akcí hráče (i, t_i) je množina akcí hráče i v Bayesiánské hře
- Bernoulliho výplatní funkce hráče (i, t_i) je dána následovně:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega | t_i) u_i(a_i, a_{-i}(\omega), \omega)$$

Nashova rovnováhy v Bitvě pohlaví

	(B,B)	(B,S)	(S,B)	(S,S)
B	2	$2p_1$	$2(1-p_1)$	0
S	0	$1-p_1$	p_1	1

Table: Výplata hráče 1

Nashovou rovnováhou je $(B,(B,S))$, pokud $p_1 \geqq \frac{1}{3}$.

Aukce se soukromým oceněním

- Hráči: 1,...,n
- Stavy světa: sekvence všech profilů $(v_1, ..., v_n)$, kde $\underline{v} \leqq v_i \leqq \overline{v}$
- Akce: Množina možných bidů, tj. kladných čísel
- Signály: $\tau_i(v_1, ..., v_n) = v_i$
- Přesvědčení: hráč i připisuje pravděpodobnost $F(v_1) \times F(v_2) \times ... \times F(v_n)$ stavu, kdy ocenění každého hráče j je nanejvýš v_j
- Výplatní funkce:
  $$u_i(b, (v_1, ..., v_n)) = \begin{cases} (v_i - P(b))/m & \text{pokud } b_j \leqq b_i \\ 0 & \text{pokud} b_j > b_i \end{cases}$$

Second-price aukce

Nabídnout v_i je slabě dominantní akce

	$\overline{b} \leqq b_i$	$b_i < \overline{b} < v_i$	$\overline{b} > v_i$
$b_i < v_i$	$v_i - \overline{b}$	0	0
v_i	$v_i - \overline{b}$	$v_i - \overline{b}$	0

	$\overline{b} \leqq v_i$	$b_i > \overline{b} > v_i$	$\overline{b} > b_i$
$b_i > v_i$	$v_i - \overline{b}$	$v_i - \overline{b}(< 0)$	0
v_i	$v_i - \overline{b}$	0	0

First-price aukce

Předpokládejme $F(v_i)$ má rovnoměrné rozdělení a $v_i \in [0,1]$

Jak vypadá Nashova rovnováha?

Předpokládejme, že ostatní nabízí $b_{-i} = \alpha v_{-i}$

Hráč řeší problém

$$\max_{b_i} p(b_i)(v - b_i) \Rightarrow \max_{b_i} (\frac{b_i}{\alpha})^{N-1}(v - b_i)$$

Teorém o stejné výnosnosti

Pokud jsou hráči rizikově neutrální, pak je očekávaná výplata ve first-price i second-price aukci při stejném počtu hráčů stejná. Je dána očekávaným druhým nejvyšším oceněním.

Aukce se společným oceněním

- Hráči: 1,...,n
- Stavy světa: sekvence všech profilů $(t_1, ..., t_n)$,
- Akce: Množina možných bidů, tj. kladných čísel
- Signály: $\tau_i(t_1, ..., t_n) = t_i$
- Přesvědčení: Signál každého hráče je nezávislý na signálech ostatních hráčů
- Výplatní funkce: $u_i(b, (t_1, ..., t_n)) =$
$$\begin{cases} v_i((t_1, ..., t_n)) - P(b))/m & \text{pokud } b_j \leq b_i \\ 0 & \text{pokud } b_j > b_i \end{cases}$$

Second-price aukce se společným oceněním

Předpokládejme, že

- Aukce účastní 2 hráči
- Signál $t_i \in [0, 1]$ má rovnoměrné rozdělení
- Ocenění je $v_i = \alpha t_i + \gamma t_j$

Nashova rovnováha je $(\alpha + \gamma)t_i$.

Second-price aukce se společným oceněním

- Pravděpodobností, že hráč 1 vyhraje:

$$P(b_1 \geqq (\alpha+\gamma)t_2) = \frac{b_1}{\alpha+\gamma}$$

- Očekávaná cena, kterou hráč 1 zaplatí:

$$E(b_2|b_2 < b_1) = \frac{1}{2}b_1$$

- Očekávaná hodnota signálu hráče 2 za předpokladu, že hráč 1 vyhraje:

$$E(t_2|t_2 \leqq \frac{b_1}{\alpha+\gamma}) = \frac{b_1}{2(\alpha+\gamma)}$$

Prokletí vítěze

Hráč odhaduje hodnotu předmětu za předpokladu, že jeho odhad je nejvyšší. Pokud tak nečiní, pak trpí tzv. prokletím vítěze (winners curse).

V případě prokletí vítěze objekt získal hráč s nejvyšším odhad. Skutečná hodnota by ale vždy byla nižší a hráč by přeplatil.