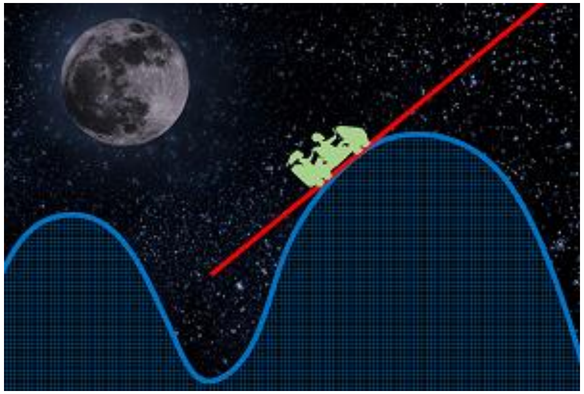
# Použití derivací



# Výpočet limit pomocí derivací

L' Hospitalovo pravidlo: Uvažujme limitu $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Pak existuje - li $\lim \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \alpha \in \mathbb{R}*$ , existuje i $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\boxed{\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha}$$

přičemž symbol "lim" může představovat libovolnou limitu $x \to a \in \mathbb{R}*$ nebo i jednostrannou limitu $x \to a+$ nebo $x \to a-$.

**Příklad:** Spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

**Řešení:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = "\frac{0}{0}"$ . Použijeme L' Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)\prime}{x\prime} = \lim_{x\to 0} \frac{cos\, x}{1} = 1.$$

**Poznámka:** Někdy musíme použít pravidlo opakovaně.

**Příklad:** Spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$.

**Řešení:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = "\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{2x} = "\frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} = 1$

# Výpočet složitějších limit

**Poznámka:** Některé limity je nutné před vlastním výpočtem nejprve převést do podílového tvaru.

**Příklad:** Spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x$.

**Řešení:** $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x =$ "$0 \cdot (-\infty)$".

Limitu zapíšeme jako: $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}$.

Nyní již jde o limitu typu "$\dfrac{-\infty}{\infty}$" použijeme L' Hospitalovo pravidlo: $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1/x}{\frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0+} -2\sqrt{x} = 0$.

**Pozor:** Nezaměňujte L‘H pravidlo se vzorcem $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ pro derivaci podílu!

# Ekonomické aplikace derivací

**Příklad:** Označme $C(x)$ náklady na výrobu $x$ jednotek produktu. Derivováním dostaneme marginální náklady $MC(x)$:

$\boxed{C'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{C(x+h)-C(x)}{h}}$. Pro malé h lze aproximovat jako

$C'(x) \approx \frac{C(x+h)-C(x)}{h}$, konkrétně pro $h = 1$ dostaneme

$C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$, proto interpretace $MC(x)$ jako náklady vyrobení dodatečné „jednotky" produktu.

**Příklad:** Chceme-li vyjádřit, jak poptávka po produktu reaguje na změnu ceny, můžeme použít poměr $\frac{\Delta D}{\Delta p}$. Vhodnějším ukazatelem je bezrozměrná veličina $\frac{\Delta D/D}{\Delta p/p}$, kdy poměřujeme procentní změnu $D$ a $p$. Limitním přechodem pro $\Delta p \to 0$ získáme vzorec pro cenovou elasticitu poptávky:

$$\boxed{El_p = \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}}$$

Q#2

# Určení rovnice tečny ke grafu

**Příklad:** Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = e^{1-x}$ v bodě $T = [1, f(1)]$.

**Řešení:** Dle definice derivace je směrnice hledané tečny rovna číslu $f'(1)$. Z analytické geometrie víme, že rovnice přímky procházející bodem $T = [1, f(1)]$ se směrnicí $f'(1)$ je:

$$\boxed{y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)}$$

Nyní zbývá určit čísla $f(1), f'(1)$:

$$f(1) = e^0 = 1, f'(x) = e^{1-x} \cdot (1 - x)' = -e^{1-x},$$

tedy $f'(1) = -e^0 = -1.$

Rovnice hledané přímky: $y - 1 = -(x - 1)$, tj. $\boxed{y = -x + 2.}$

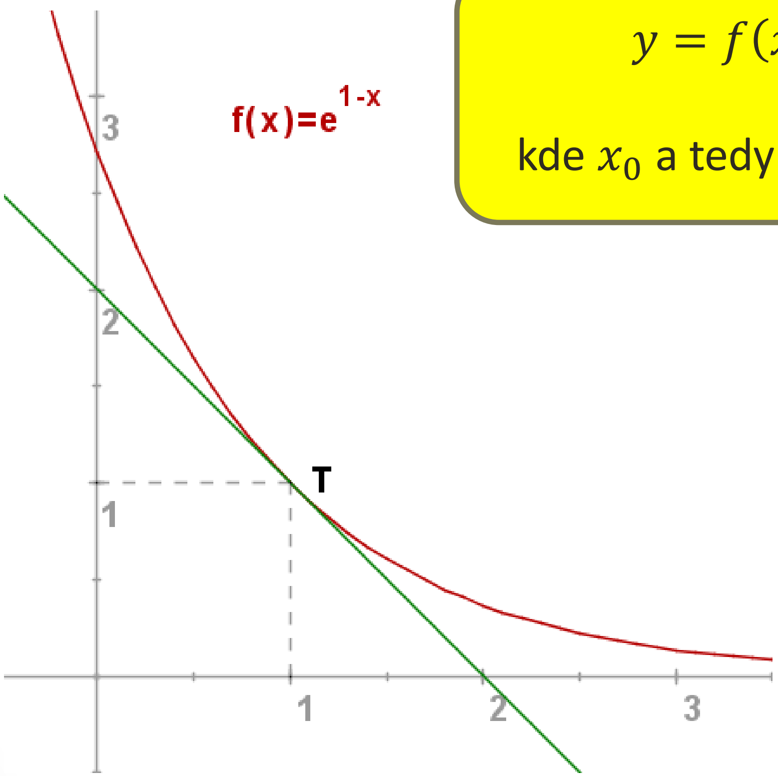
http://demonstrations.wolfram.com/CarTravelingAtNight/

# Určení rovnice tečny ke grafu

Tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$ je dána rovnicí

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

kde $x_0$ a tedy i $f(x_0), f'(x_0)$ jsou konstanty!



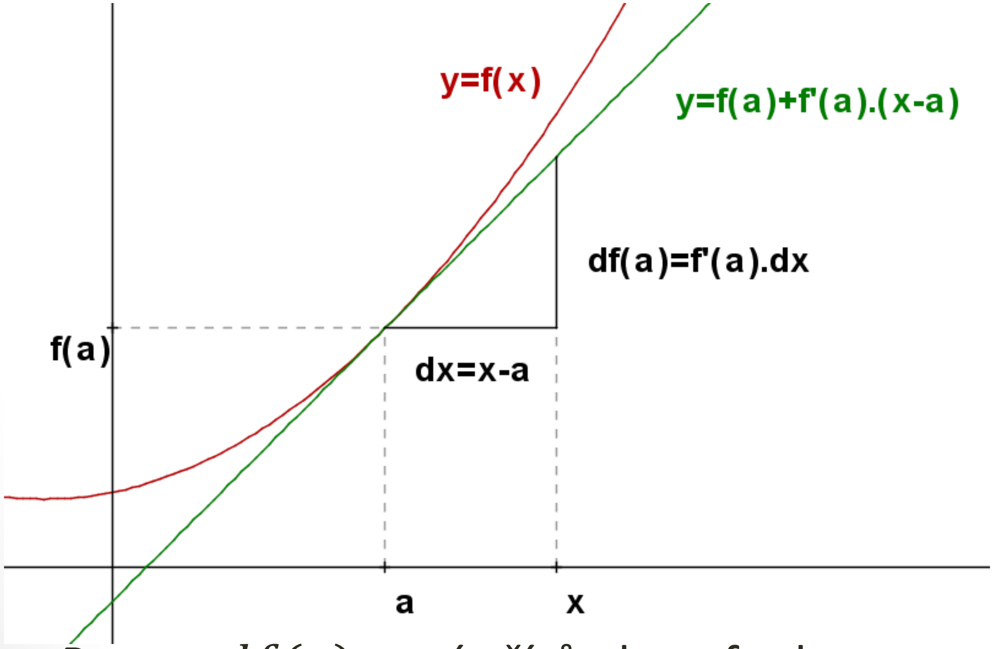

Obrázek: Tečna ke grafu funkce $f(x) = e^{1-x}$ v bodě $T = [1, f(1)]$.

# Diferenciál

Uvažujme funkci $f(x)$, která má v bodě $a$ derivaci $f'(a)$. Sestrojíme - li ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $a$ tečnu, $t$: $y = f(a) + f'(a).(x-a)$, můžeme pro $x$ blízká bodu $a$ odhadnout hodnotu $f(x)$ jako

$f(x) \approx f(a) + f'(a).(x-a)$. Výraz $df(a) = f'(a).(x-a)$ nazýváme diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě $a$, píšeme

$$df(a) = f'(a) \cdot dx.$$




Pozor: $df(a)$ není přírůstkem funkce, pouze jej aproximuje!

# Diferenciál - příklad

Diferenciál lze využívat pro lineární aproximaci funkční hodnoty.

**Příklad:** Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$.

- Určete diferenciál funkce $f(x)$ v bodě $a$.
- Pomocí tohoto diferenciálu odhadněte $\sqrt{5}$ .

**Řešení:**

- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f'(4) = \frac{1}{4}$. Tedy $df(4) = \frac{dx}{4}$.
- $\sqrt{5} = f(5) \approx f(a) + f'(a).(5-a) = \sqrt{4} + \frac{5-4}{4} = 2{,}25$

**Poznámka:** Skutečná hodnota zaokrouhlená na 3 desetinná místa je $\sqrt{5} = 2{,}236$.

# Taylorův polynom

Ještě přesnější odhady můžeme získat pomocí Taylorova polynomu:
Má-li funkce $f(x)$ derivace v bodě $a$ derivace až do $n$-tého řádu, pak v tomto bodě definujeme Taylorův polynom stupně $n$:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$$

Pro $x$ "blízká bodu $a$" platí $f(x) \approx T_n(x)$, chybu $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjádřit v různých tvarech.

**Příklad:** Pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a bod $a = 4$.

- Určete Taylorův polynom $T_3(x)$.
- Pomocí tohoto polynomu odhadněte $\sqrt{5}$.

**Řešení:**

- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$.

Dosadíme: $f'(4) = \frac{1}{4}, f''(4) = \frac{-1}{32}, f'''(4) = \frac{3}{256}$.

Tedy $T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2}.\frac{-1}{32}.(x-4)^2 + \frac{1}{6}.\frac{3}{256}.(x-4)^3$

- $\sqrt{5} = f(5) \approx 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.\frac{-1}{32} + \frac{1}{6}.\frac{3}{256} = 2{,}236328125.$

**Poznámka:** Skutečná hodnota zaokrouhlená na 4 desetinná místa je $\sqrt{5} = 2{,}2361$.
http://demonstrations.wolfram.com/TaylorSeries/