Derivace

Definice a význam derivace

Jestliže pro funkci f a bod x_0 existuje $\boxed{f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},}$

pak toto číslo nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.

Poznámka: V případě, že existuje jen $\lim\limits_{x \to x_0+}$, mluvíme o derivaci zprava, pro $\lim\limits_{x \to x_0-}$, mluvíme o derivaci zleva.

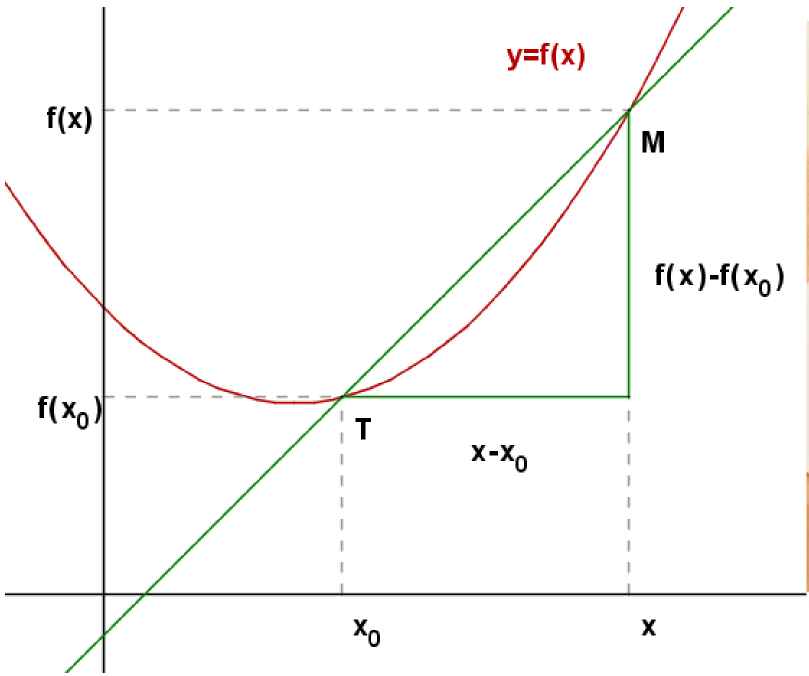
Příklad: Určete $f'(2)$, je-li $f(x) = x^2$.

Řešení: $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 2 + 2 = 4$

Poznámka: Pro $y = f(x)$ píšeme též $y' = \frac{dy}{dx}$, derivace tedy vyjadřuje okamžitý relativní přírůstek neboli tempo růstu závislé proměnné. V ekonomii například veličina TC (celkové náklady) závisí na veličině Q (objem produkce). Definujeme veličinu $MC = TC' = \frac{d\,TC}{d\,Q}$, tuto veličinu nazýváme marginální náklady.

Geometrický význam derivace

Podíl $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je směrnicí přímky jdoucí body $T[x_0, f(x_0)], M[x, f(x)]$:



Limitním přechodem se bod M přiblíží k bodu T, číslo $f'(x_0)$ tedy vyjadřuje směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$.

Derivace vyšších řádů

Derivace jako funkce: Má-li funkce f derivaci v každém bodě x_0 intervalu I (případně v krajních bodech intervalu má derivaci zprava, resp. zleva), pak f je na intervalu I spojitá. Přiřazení $x_0 \rightarrow f'(x_0)$ zde definuje funkci f'.

Příklad: Určete funkci f' je-li $f(x) = x^2$.

Řešení: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - {x_0}^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$

Závěr: Pro $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ platí: $f'(x) = 2x$.

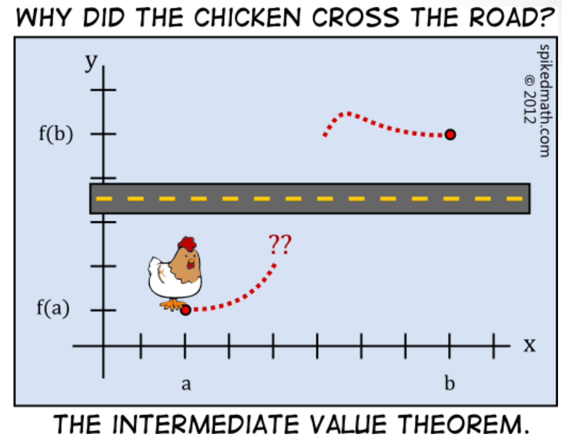
Jestliže na nějakém intervalu $I_1 \subseteq I$ má funkce f' derivaci, pak tuto derivaci značíme f'' a nazýváme druhou derivací. Analogicky můžeme definovat třetí derivaci a derivace vyšších řádů.

Příklad: Určete druhou derivaci f'' pro funkci $f(x) = x^2$.

Řešení: Jelikož $f'(2) = 2x$, platí: $f''(x) = (2x)' = 2$.

http://demonstrations.wolfram.com/DerivativeAsAFunction/

Spojitost a derivace



Věta: Má-li funkce $f(x)$ derivaci

v bodě $x = a$, pak je v tomto bodě spojitá.

Věta: Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí-li $f(a) \neq f(b)$ pak pro libovolné c z otevřeného intervalu

s koncovými body $f(a), f(b)$ existuje alespoň jedno

$x^* \in (a, b)$, pro které $f(x^*) = c$. Specielně, mají-li $f(a)$ a $f(b)$ opačná znaménka, pak má funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) nulový bod.

Věta o střední hodnotě: Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci pro všechna $x \in (a, b)$, pak existuje alespoň jedno $x^* \in (a, b)$, pro které

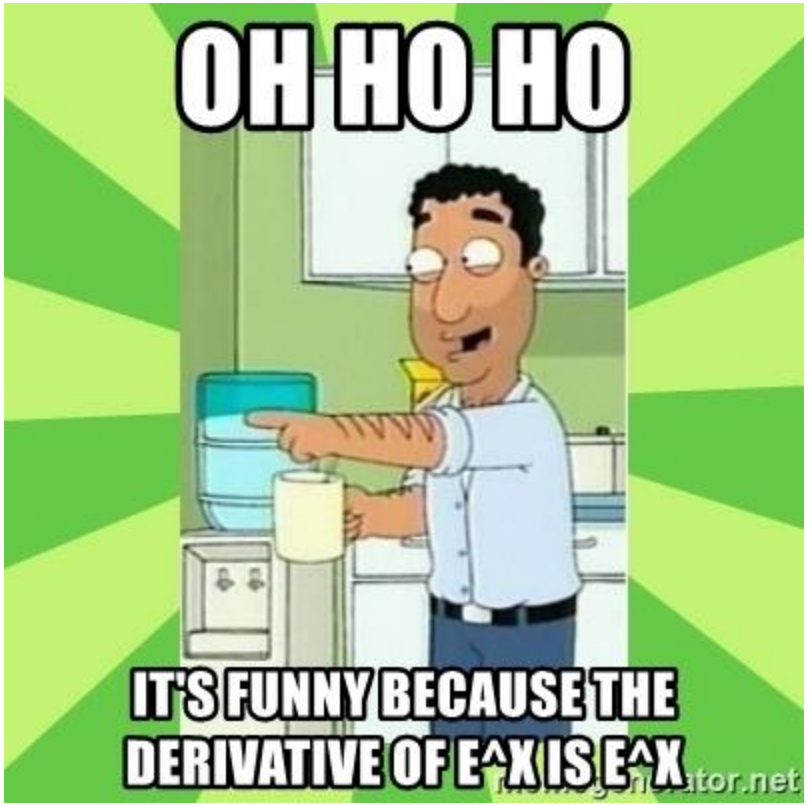
$$\boxed{f'(x^*) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

http://demonstrations.wolfram.com/MeanValueTheorem/

Derivace elementárních funkcí

Všude, kde jsou obě strany definovány, platí:

- $(x^r)' = r\,x^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, \; a > 0$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(tg\; x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(cotg\; x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\text{arc}cos\; x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\text{arc}tg\; x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\text{arc}cotg\; x)' = \frac{-1}{1+x^2}$



Pravidla pro derivování

Příklad: Určete derivaci f' pro funkci $f(x) = \sqrt{x^7}$.

Řešení: Jelikož $f(x) = x^{\frac{7}{2}}$, pro $x \geq 0$ platí: $f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$

Věta: Pro libovolné funkce $f(x)$, $g(x)$ a konstantu $c \in \mathbb{R}$ platí ve všech bodech, kde mají f a g derivaci a kde jsou následující výrazy definovány:

- $(c.f(x))' = c.f'(x)$
- $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$
- $\left(f(x).g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Příklad: Určete derivace pro funkce $u(x) = \sin x \cdot e^x$, $v(x) = \frac{arctg\ x}{x^2}$

Řešení: $u'(x) = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x$

$$v'(x) = \frac{(arctg\ x)' \cdot x^2 - arctg\ x \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{x^2}{x^2+1} - arctg\ x \cdot (2x)}{x^4}$$

Derivace složené funkce $F(x) = f(\varphi(x))$

Věta: Má-li vnitřní složka $u = \varphi(x)$ derivaci v bodě x_0 a vnější složka v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, pak existuje $F'(x_0)$ a platí:

$$\boxed{F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'\big(\varphi(x_0)\big) \cdot \varphi'(x_0)}$$

Příklad: Určete derivaci funkce $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Řešení: Jde o složenou funkci, vnitřní složka $u = x^2 + 1$, vnější složka $f(u) = \sqrt{u}$.

Tyto funkce mají derivace $u' = 2x, f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Tedy

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.