Použití derivací: průběh funkce, optimalizace

Derivace a monotónnost funkce

Věta: Uvažujme funkci $f(x)$, která má na intervalu I derivaci $f'(x)$. Pak

- je-li $f'(x) > 0\ \forall\, x \in I$, funkce $f(x)$ je na intervalu I rostoucí.
- je-li $f'(x) < 0\ \forall\, x \in I$, funkce $f(x)$ je na intervalu I klesající.
- je-li $f'(x) \geq 0\ \forall\, x \in I$, funkce $f(x)$ je na intervalu I neklesající.
- je-li $f'(x) \leq 0\ \forall\, x \in I$, funkce $f(x)$ je na intervalu I nerostoucí.

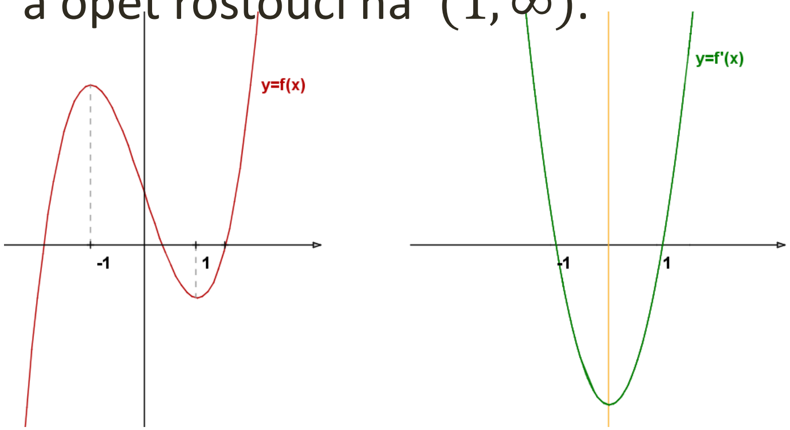
Příklad: Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Řešení: Budeme vycházet z funkce $f'(x) = 3x^2 - 3$. Nulové body funkce $f'(x)$ jsou $-1, 1$, ty rozdělí reálnou osu na tři intervaly. Znamení funkce $f'(x)$ je následující:

$(-\infty, -1)$	$(-1,1)$	$(1, \infty)$
$+$	$-$	$+$

Tedy podle předchozí věty je funkce $f(x)$ rostoucí na intervalu $(-\infty, -1)$, klesající na $(-1,1)$ a opět rostoucí na $(1, \infty)$.

Znázorněme si graf funkce
$f(x) = x^3 - 3x + 1$
a graf její derivace
$f'(x) = 3x^2 - 3$



Lokální extrémy

Definice: Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum (resp. maximum), jestliže je definována v nějakém okolí bodu x_0 a jestliže pro všechna x z tohoto okolí platí

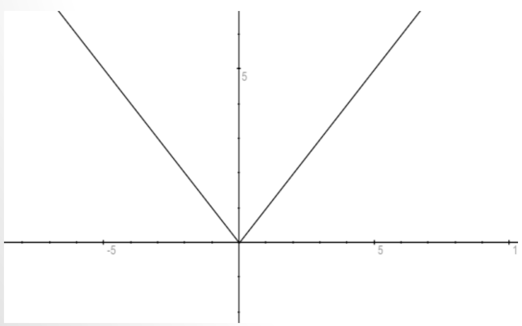
$$f(x) \geq f(x_0), \text{ resp. } f(x) \leq f(x_0)$$

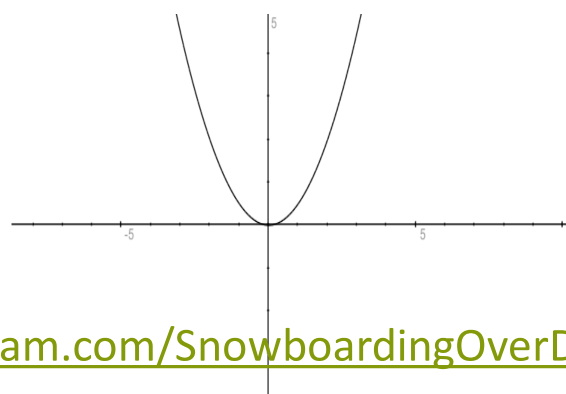
Lokální minima a maxima souhrnně nazýváme lokální extrémy.

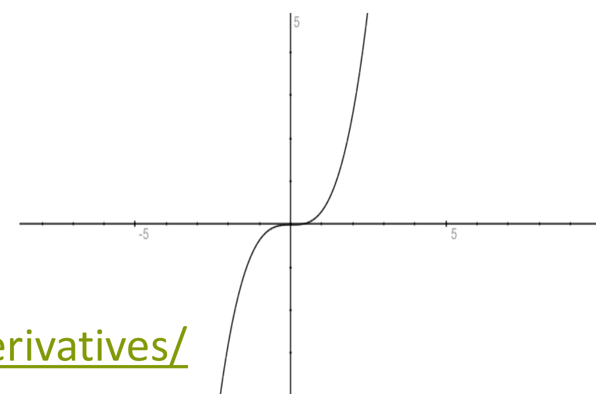
Věta: Pokud má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li zde derivace, pak pro tuto derivaci platí

$$f'(x_0) = 0$$

Poznámka: Body s nulovou derivací nazýváme stacionární. Podmínka $f'(x_0) = 0$ však není ani nutnou ani postačující podmínkou pro existenci extrému, viz funkce $f_1(x)$, která má v bodě $x_0 = 0$ lokální minimum, ale nemá zde derivaci nebo funkce $f_3(x)$, pro kterou platí $f'(0) = 0$, ale nemá žádný lokální extrém.







http://demonstrations.wolfram.com/SnowboardingOverDerivatives/

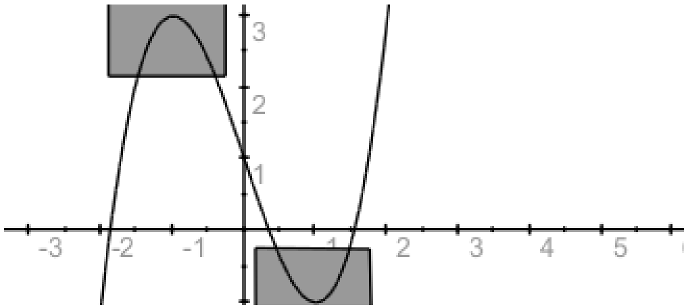
Existence lokálního extrému

Věta: Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci a platí $f'(x_0) = 0$. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že:

- $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x_0) > 0$ a $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$: $f'(x_0) < 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum
- $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x_0) < 0$ a $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$: $f'(x_0) > 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Řešení: Již dříve jsme spočetli $f'(x) = 3x^2 - 3$ a našli stacionární body $-1, 1$. Víme, že derivace $f'(x)$ je kladná nalevo od bodu $x_1 = -1$ a napravo od bodu $x_2 = 1$ a záporná mezi nimi. Takže v bodě $x_1 = -1$ nastává lokální maximum s hodnotou $f(-1) = 3$ a v bodě $x_2 = 1$ lokální minimum s hodnotou $f(1) = -1$.



Absolutní extrémy

Definice: Řekneme, že funkce $f(x)$ má na množině M absolutní minimum (resp. maximum) v bodě x_0, jestliže je funkce definována na M a platí

$$\forall\, x \in M\colon f(x) \geq f(x_0), \text{resp.}$$
$$\forall\, x \in M\colon f(x) \leq f(x_0).$$

Poznámka: Absolutní minima a maxima nazýváme absolutní extrémy nebo též globální extrémy. Pokud v definici zaměníme neostré nerovnosti za ostré, dostaneme tzv. ostré (či vlastní) extrémy.

Věta: (Weierstrassova) Je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak funkce $f(x)$ nabývá na tomto intervalu svého absolutního minima, a to buď v bodě lokálního extrému nebo v některém z krajních bodů a, b. Totéž platí pro absolutní maximum.

Absolutní extrémy - příklad

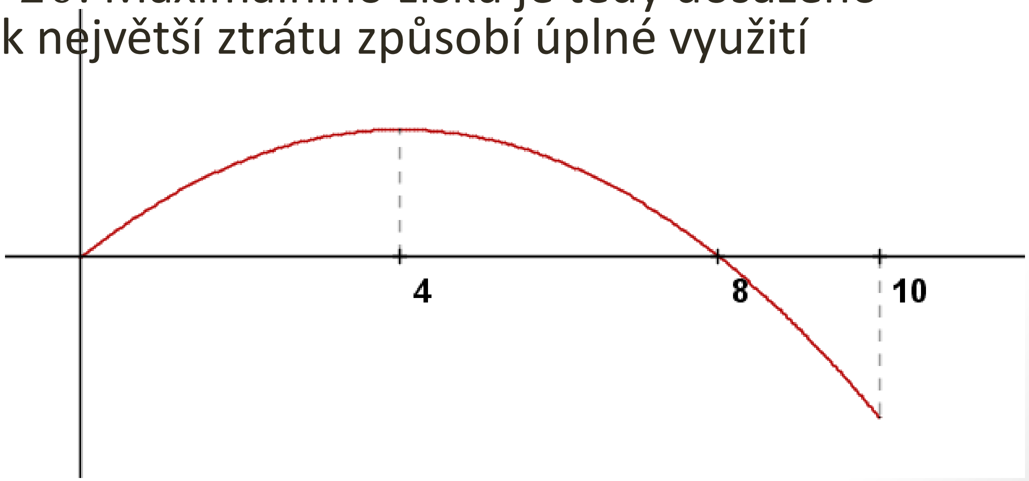
Příklad: Celkové příjmy (TR) i celkové náklady (TC) jsou funkcí vyrobeného množství, bylo zjištěno, že:

$$TR(Q) = Q^3 - 2Q^2 - 2Q,$$
$$TC(Q) = Q^3 - Q^2 - 10Q$$

Optimalizujte zisk $P(Q) = TR(Q) - TC(Q)$, jestliže výrobní kapacita je 10 jednotek produktu.

Řešení: Hledáme tedy extrémy funkce $P(Q) = -Q^2 + 8Q$ na intervalu $\langle\, 0, 10 \,\rangle$. Spočteme

$P'(Q) = -2\,Q + 8$, stacionární bod je $Q = 4$. Globální extrémy mohou nastat v bodech 0; 4; 10. Porovnáme hodnoty $P(0) = 0$, $P(4) = 16$, $P(10) = -20$. Maximálního zisku je tedy dosaženo pro množství $Q = 4$, naopak největší ztrátu způsobí úplné využití výrobních kapacit, $Q = 10$.



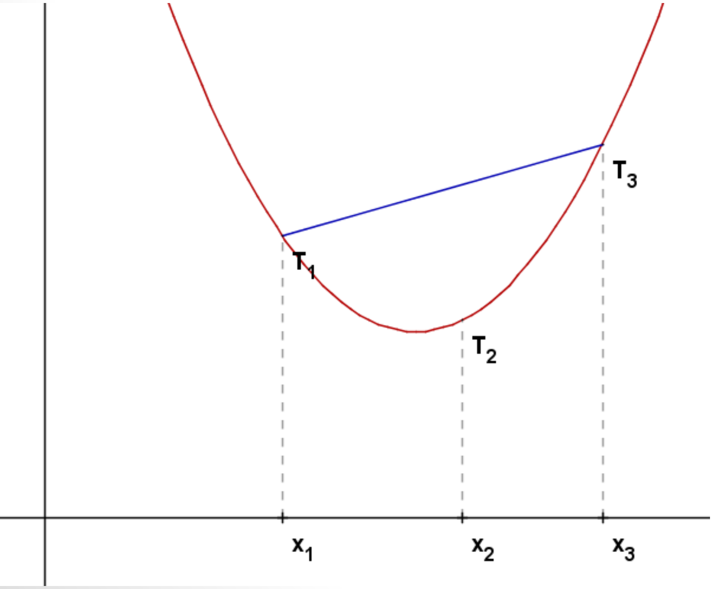
Konvexita a konkávnost funkce

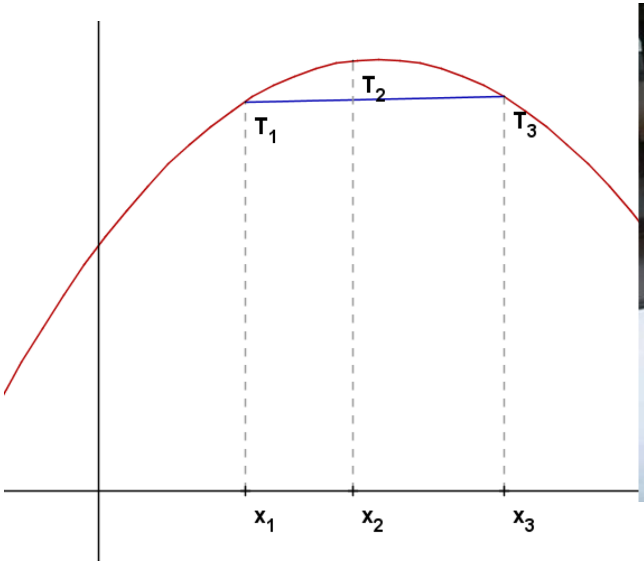
Definice: Řekneme, že funkce $f(x)$ je na intervalu I

- ryze konvexní, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ platí: $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$ bod $T_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží pod úsečkou spojující body $T_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $T_3 = [x_3, f(x_3)]$.

Obdobně o funkci $f(x)$řekneme, že je na I

- ryze konkávní, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ platí: $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$ bod $T_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží nad úsečkou spojující body $T_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $T_3 = [x_3, f(x_3)]$.





Konvexita a konkávnost funkce

Poznámka: Připustíme-li v definici, aby bod T_2 ležel i na úsečce $T_1\ T_3$, pak vynecháme slůvko "ryze".

Věta: Má-li funkce $f(x)$ má na intervalu I druhou derivaci, pak platí

- $\forall\, x \in\ I$: $f''(x) \geq\ 0$, pak je funkce konvexní na I
- $\forall\, x \in\ I$: $f''(x) \leq\ 0$, pak je funkce konkávní na I

Poznámka: Body, ve kterých "se mění konvexita a konkávnost funkce" nazýváme inflexní body. Funkce může mít inflexní bod pouze v bodech, kde existuje první derivace a druhá derivace buď neexistuje nebo je nulová.

Věta: Jestliže pro funkci $f(\mathrm{x})$ v bodě x_0 platí:

$f'(x_0) =\ f''(x_0) = \cdots\ =\ f^{(n)}(x_0) =\ 0$ a $f^{(n+1)}(x_0) \neq\ 0$, pak

- je -li n sudé, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod
- je -li n liché, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém, a to maximum pro $f^{(n+1)}(x_0)\ <\ 0$ a minimum pro $f^{(n+1)}(x_0) >\ 0$.

Konvexita a konkávnost -příklad

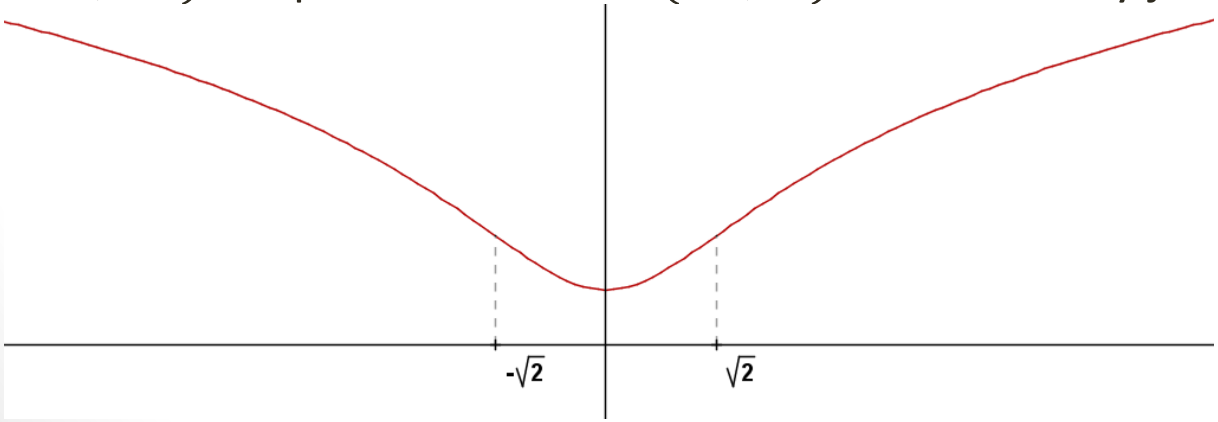
Příklad: Je dána funkce $f(x) = \ln(x^2 + 2)$. Určete inflexní body této funkce a zjistěte, kde je konvexní a kde konkávní.

Řešení: Určíme druhou derivaci, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$, $f''(x) = \frac{2(x^2+2) - 2x.2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4 - 2x^2}{(x^2+2)^2}$.

Nulové body druhé derivace jsou $\pm\sqrt{2}$. Určeme znamení funkce $f''(x)$:

$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$-$	$+$	$-$

Tedy funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, -\sqrt{2})$, konvexní na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a opět konkávní na $(\sqrt{2}, \infty)$. Inflexní body jsou $\pm\sqrt{2}$.



Asymptoty funkce

Asymptoty jsou přímky, ke kterým "se blíží" graf funkce.

Definice: Asymptotou bez směrnice nazveme přímku $x = a$, pokud $\lim_{a} f(x) = \pm\infty$, kde symbol lim označuje některou z limit $\lim_{x \to a}$, $\lim_{x \to a-}$, $\lim_{x \to a+}$

Příklad: Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ má asymptoty bez směrnice $x = -2$, $x = -3$, neboť

$$\lim_{x \to -3-} f(x) = \infty, \lim_{x \to -3+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to -2-} f(x) = -\infty, \lim_{x \to -2+} f(x) = \infty$$

Definice: Přímku $y = Ax + B$ nazveme asymptotou funkce $f(x)$ ve nevlastním bodě ∞, resp. $-\infty$, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (Ax + B)] = 0, \text{resp.} \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (Ax + B)] = 0.$$

Příklad: Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$ má v nevlastních bodech asymptotu $y = 0$, protože $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2+5x+6} - 0 \right) = 0.$

Asymptoty funkce - příklad

Věta: Přímka $y = Ax + B$ je asymptotou funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$ $\Leftrightarrow$

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \; B = \lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax), \text{ resp.}$$
$$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \; B = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - Ax)$$

Poznámka: Funkce $f(x)$ nemusí mít žádné asymptoty, např. funkce $f(x) = \sin x$.

Příklad: Určete asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$ v nevlastních bodech.

Řešení: Nejprve určíme asymptotu v $+\infty$:

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1,$$
$$B = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

Tedy hledaná asypmtota má rovnici $y = x + 2$. Obdobně postupujeme v $-\infty$:

$$A = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2} = 1,$$
$$B = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

Tedy hledaná asymptota je $y = x + 2$.