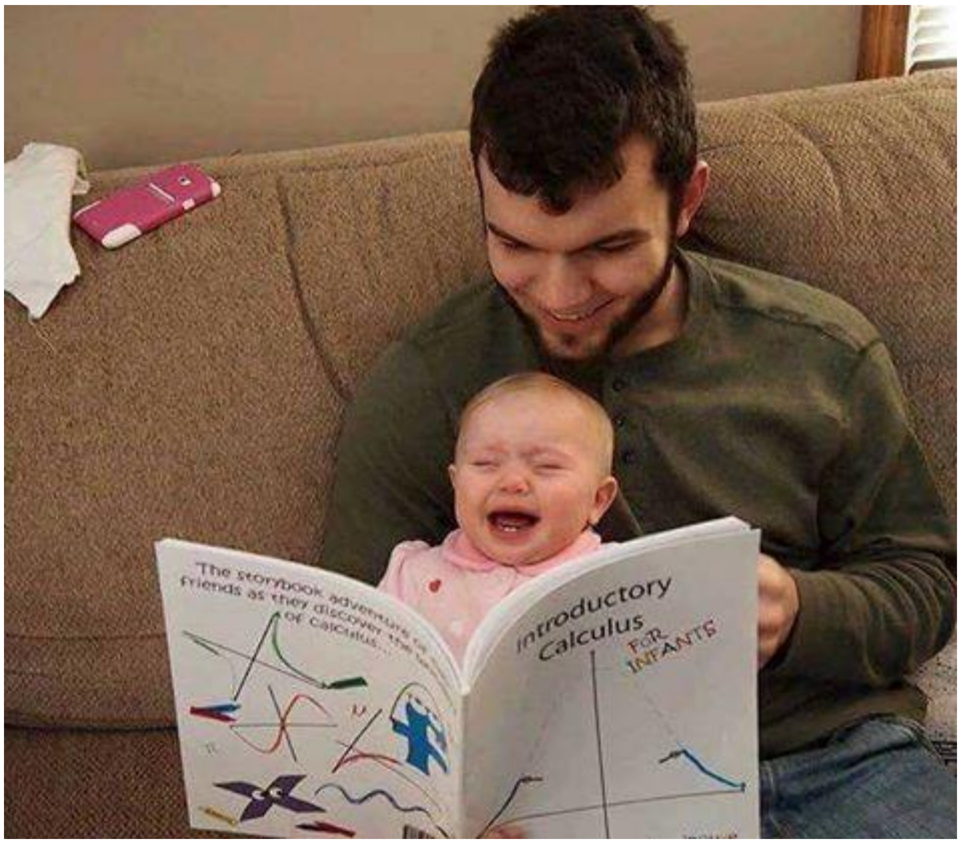
Matematická analýza (Calculus)



Zobrazení

- Uvažujme neprázdné množiny A, B. Pravidlo F, které každému $x \in A$ přiřadí právě jedno $y \in B$ nazýváme zobrazením A do B.
- Terminologie a označení:

Skutečnost, že prvku x je přiřazen prvek y zapisujeme jako

$x \longmapsto \mathrm{y}$ nebo $\mathrm{y} = \mathrm{F(x)}$, y nazýváme obrazem x a x nazýváme vzorem y.

Pro zobrazení $F: A \rightarrow B$ nazýváme množinu A definičním oborem zobrazení, píšeme $D_F = A$.

Množinu všech obrazů prvků definičního oboru nazýváme oborem zobrazení, značíme H_F.

- Poznámka: Je-li $H_F = B$, řekneme, že F je zobrazením A na B.

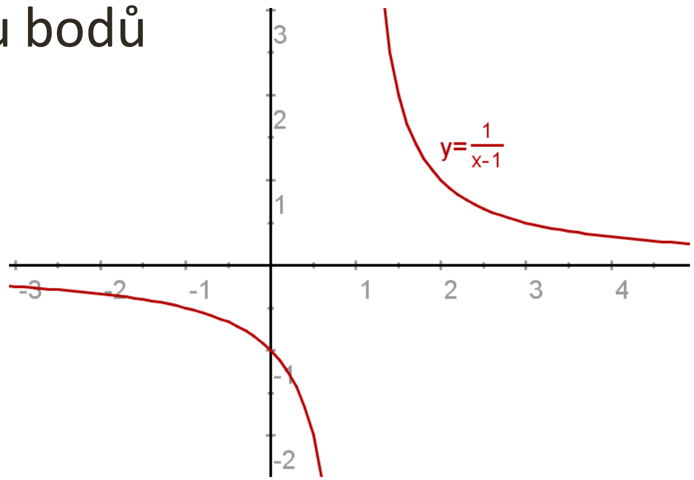
Funkce a její graf

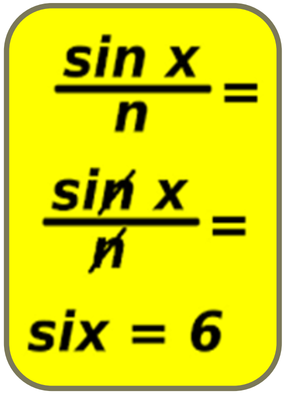
Funkcí nazveme zobrazení $f: A \to B$, kde B je číselná množina, v případě $B = \mathbb{R}$ mluvíme o reálné funkci. Je-li též $A = \mathbb{R}$, nazveme f reálnou funkcí reálné proměnné.

Funkce se často zadává výrazem, například $f(x) = \frac{1}{x-1}$, kde x nazýváme argument funkce. Definičním oborem funkce je množina $A \subseteq \mathbb{R}$, pro jejíž prvky má výraz smysl. Pro uvedenou funkci je $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Grafem reálné funkce reálné proměnné rozumíme množinu bodů

$\{[x, f(x)], x \in D_f\}$

vyznačenou v kartézském souřadném systému



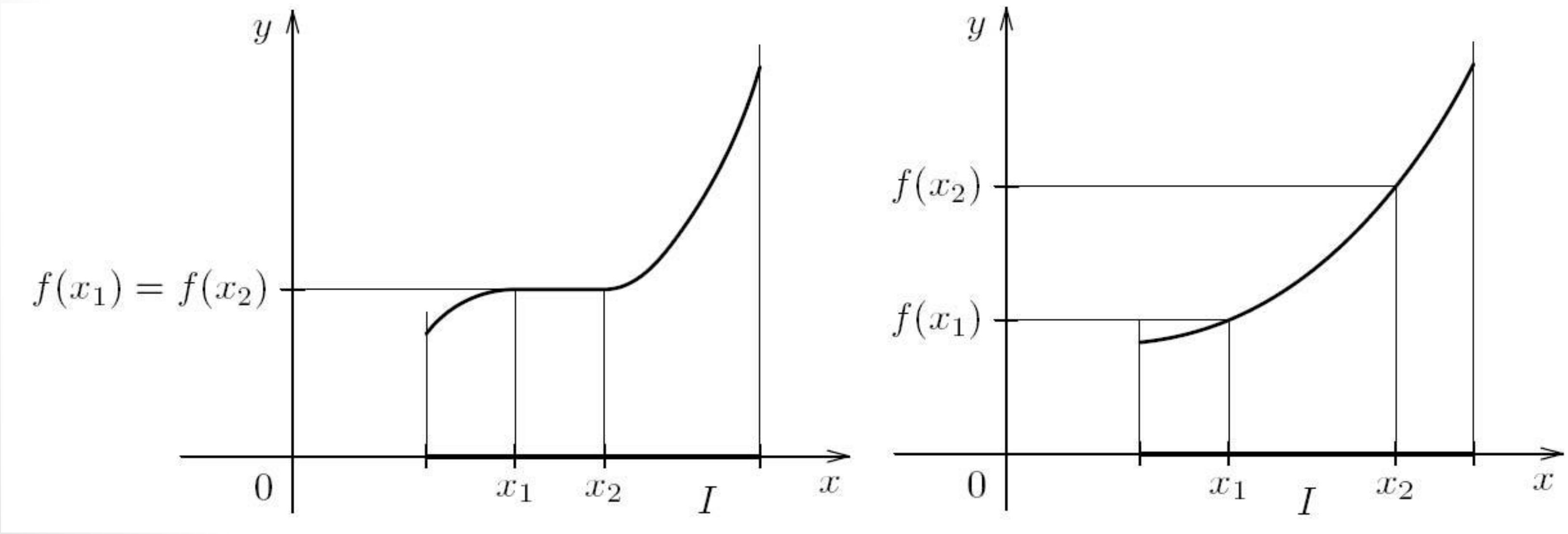


Prostá funkce

O funkci $f: A \to\ B$ řekneme, že je prostá, jestliže „jsou všechny obrazy různé“, tj. $\forall\, x_1, x_2 \in D_f: x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \mathrm{f}(x_1) \neq f(x_2)$

Příklad: Funkce $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ daná vztahem $f(x) = x + 1$ je prostá, neboť $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1$ pro lib. $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$.

Příklad: vyberte, na kterém z obrázků je graf prosté funkce

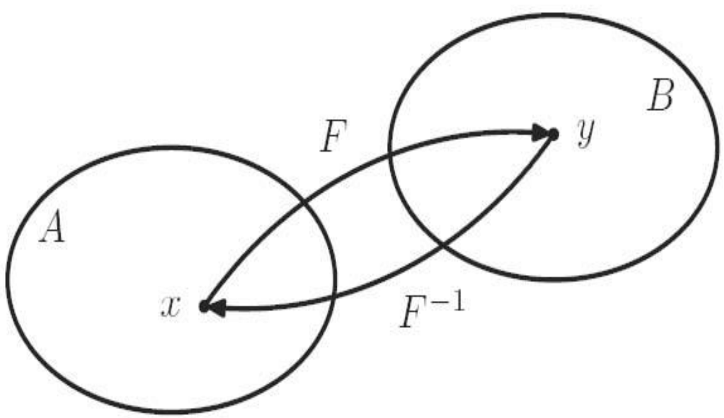


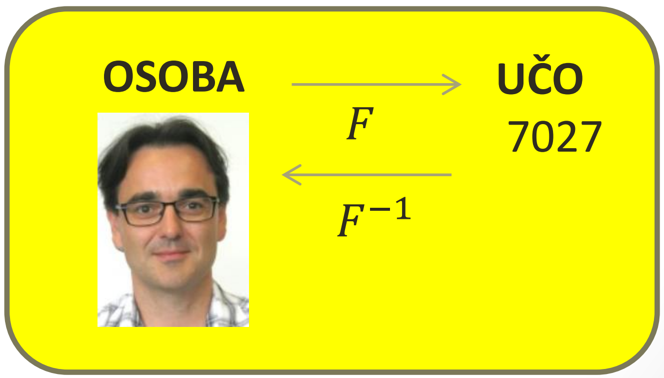
Inverzní funkce

Je-li $f: A \rightarrow B$ prostá funkce množiny A na množinu B, pak existuje zobrazení $f^{-1}: B \rightarrow A$, které každému y ∈ B přiřadí jeho vzor, tj. $f^{-1}(y) = x$, kde $f(x) = y$

- Pozor: Značení inverzní funkce nevyjadřuje umocňování výrazu $f(y)$ na -1. (tedy $f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}$)
- Příklad: Pro funkci $f(x) = x + 1$ z předchozího příkladu platí:

$\forall x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}$: y $= x + 1 \Leftrightarrow y - 1 = x$, tedy inverzní funkce $f^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ je dána vztahem $f^{-1}(y) = y - 1, \forall y \in \mathbb{N}_0$





Inverzní funkce - příklad

Příklad: Rozhodněte, zda je funkce prostá, a pokud ano, najděte k ní funkci inverzní: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}^+$

Řešení: pro $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 1 \neq x_2^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2+1} \neq \frac{1}{x_2^2+1}$

tedy funkce je prostá. Obor hodnot funkce je $H_f = (0,1)$, neboť jmenovatel výrazu je vždy větší než 1. K nalezení inverze vyjádříme x ze vztahu $y = \frac{1}{x^2+1}$. Postupujeme takto:

$y.(x^2 + 1) = 1,$

$y.x^2 = 1 - y,$

$x^2 = \frac{1-y}{y}$

$x = +\sqrt{\frac{1-y}{y}}$

Tento vztah platí pro $\forall y \in (0,1)$. Protože bývá obvyklé označovat nezávislou proměnnou jako x, můžeme psát $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}},\ x \in (0,1)$.

Monotónní funkce

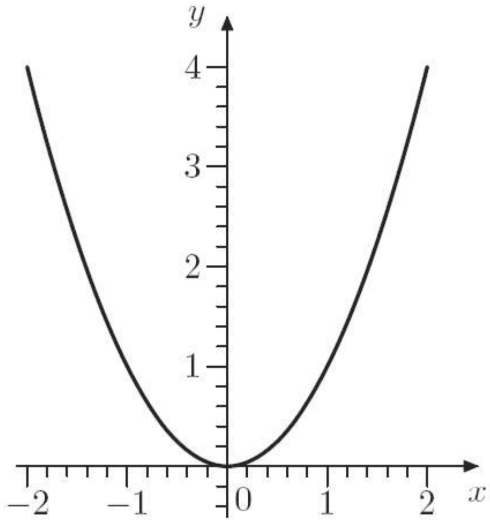
Uvažujme $A \subseteq \mathbb{R}, f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že je f na A:

- Rostoucí $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Klesající $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Nerostoucí $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Neklesající $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Všechny uvedené typy funkcí nazýváme monotónní, první dva ryze monotónní.

Příklad:

Je funkce $f(x) = x^2$ monotónní na $\mathbb{R}$ nebo na nějaké podmnožině $A \subseteq \mathbb{R}$?



Elementární funkce

Funkce, které můžeme vytvořit ze základních elementárních funkcí (mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické).

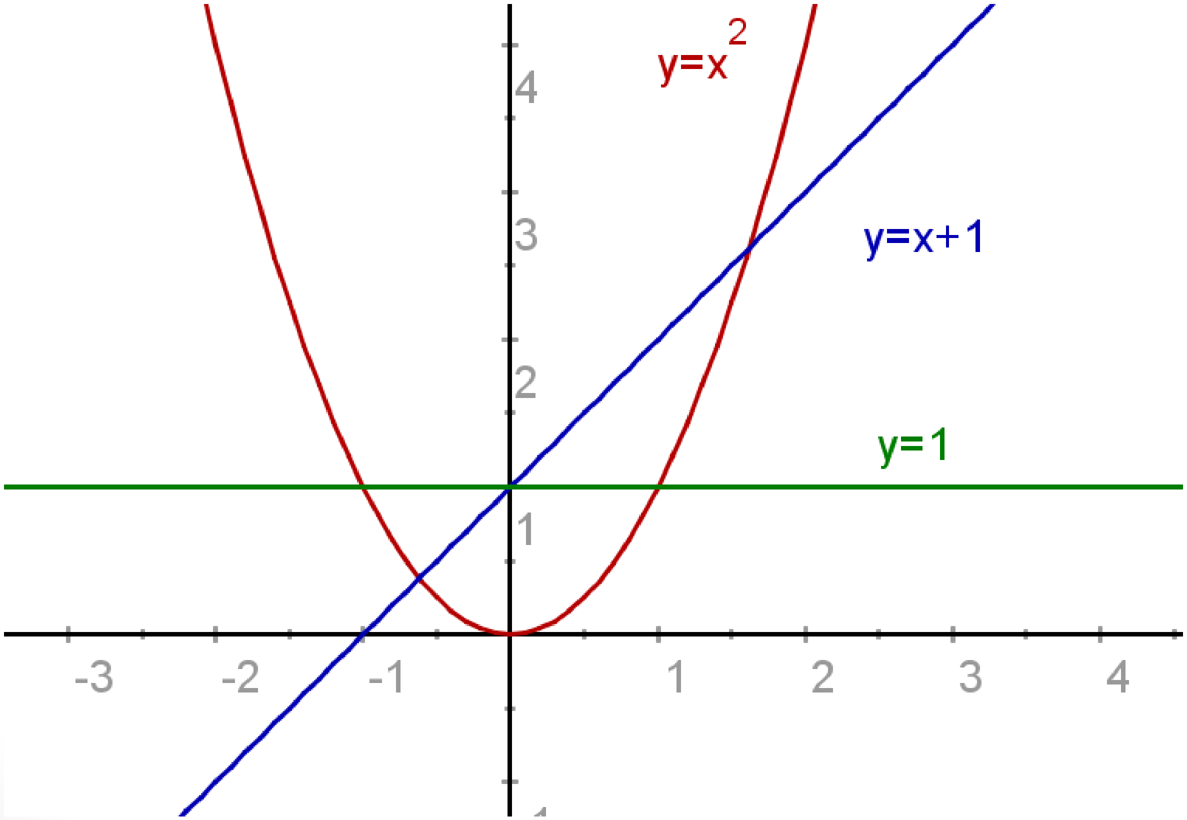
Mocninná funkce $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ $(D_f = \mathbb{R})$

Pro čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ definujeme polynom $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ Číslo n nazýváme stupněm polynomu

- Polynom stupně 0 nazýváme konstantní funkcí
- Polynom stupně 1 nazýváme lineární funkcí
- Polynom stupně 2 nazýváme kvadratickou funkcí

Polynom

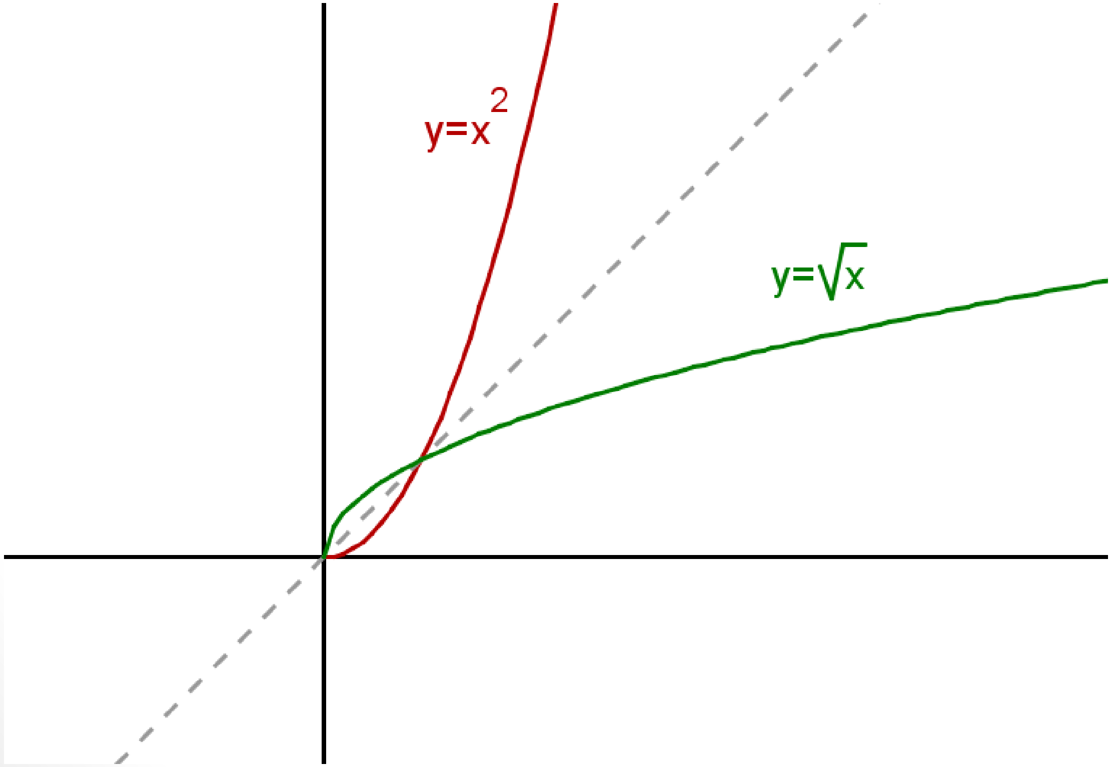
- Příklad: Nakreslete do jednoho obrázku grafy konstantní funkce $y = 1$, lineární funkce $y = x + 1$ a kvadratické funkce $y = x^2$



Odmocnina

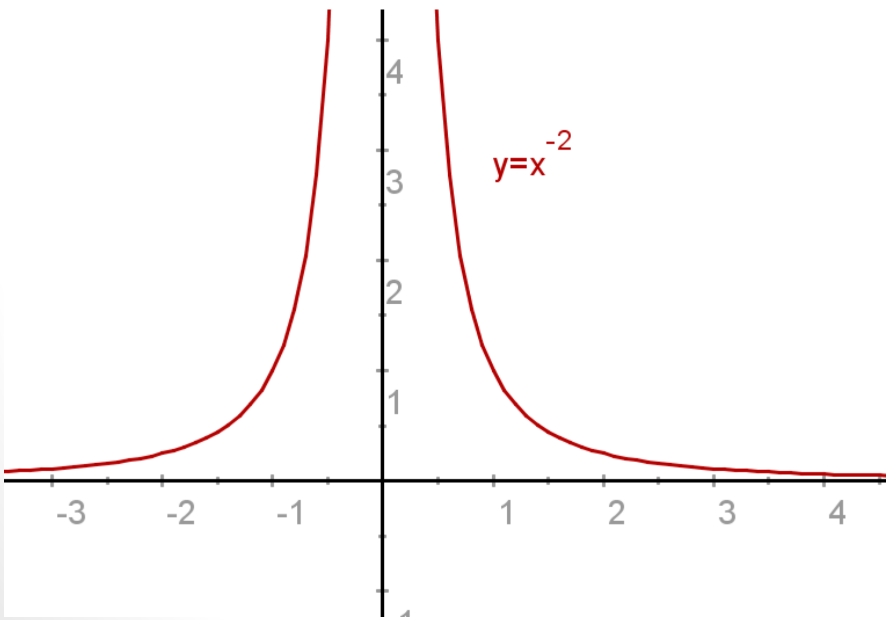
Funkce odmocnina $y = \sqrt[n]{x}$ je inverzí k funkci $y = x^n, n \in \mathbb{N}$ (D_f je pro sudé n omezen na $x \geq 0$)

Při konstrukci grafu využijeme symetrie grafů vzájemně inverzních funkcí podle osy prvního kvadrantu.



Mocninná funkce

- Mocninná funkce $f(x) = x^{-n}, n \in \mathbb{N}$ $(D_f = \mathbb{R} - \{0\})$ Grafem je pro $n = 1$ hyperbola. Obecnější mocninná funkce s reálným exponentem má definiční obor zúžen na $\mathbb{R}^+$, resp. $\mathbb{R}^+ - \{0\}$
- Příklad: Načrtněte graf funkce $y = x^{-2}$
- Řešení: funkce je nespojitá v bodě $x = 0$, má zde asymptotu

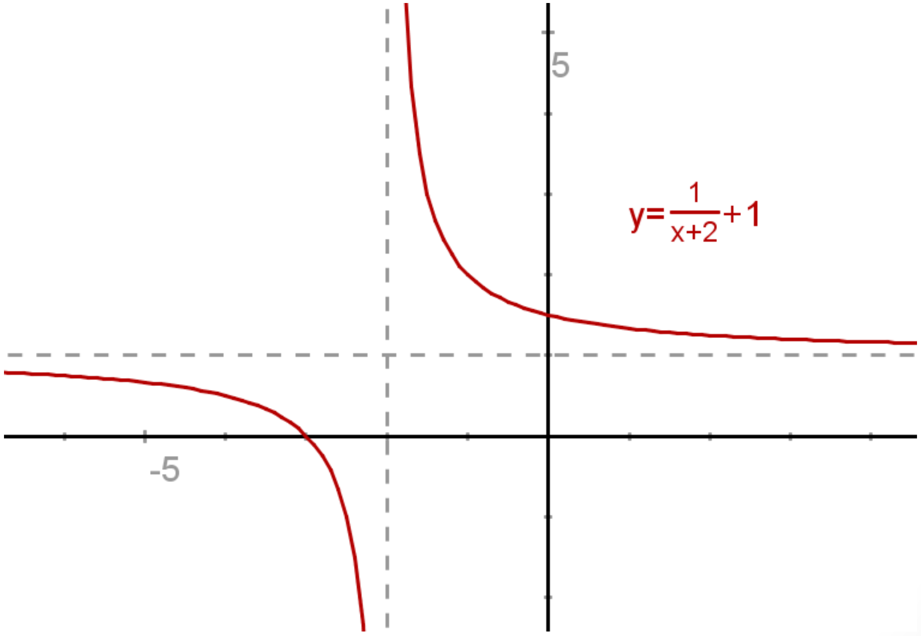


Racionální lomená funkce

- Racionální lomená funkce $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy. ($D_f = \{x \in \mathbb{R}: Q(x) \neq 0\}$
- Příklad: Načrtněte graf funkce a určete její definiční obor funkce $y = \frac{x+3}{x+2}$
- Řešení: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Předpis lze snadno upravit

na $y = \frac{1}{x+2} + 1$



Racionální lomená funkce

Racionální lomenou funkci nazveme ryze lomenou, je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele. V opačném případě lze upravit pomocí dělení polynomů.

- Příklad: Upravte na součet polynomu a ryze lomené funkce:

  $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 + 1}{x^2 + 1}$

- Řešení:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(3x^4 & -2x^3 & & & +1\,) & : (x^2+1) = 3x^2 - 2x - 3 + \frac{2x+4}{x^2+1} \\
-(3x^4 & & +3x^2) & & & \\
\hline
 & -2x^3 & -3x^2 & & +1 & \\
 & -(-2x^3 & & -2x) & & \\
\hline
 & & -3x^2 & +2x & +1 & \\
 & & -(-3x^2 & & -3) & \\
\hline
 & & & 2x & +4 &
\end{array}
$$

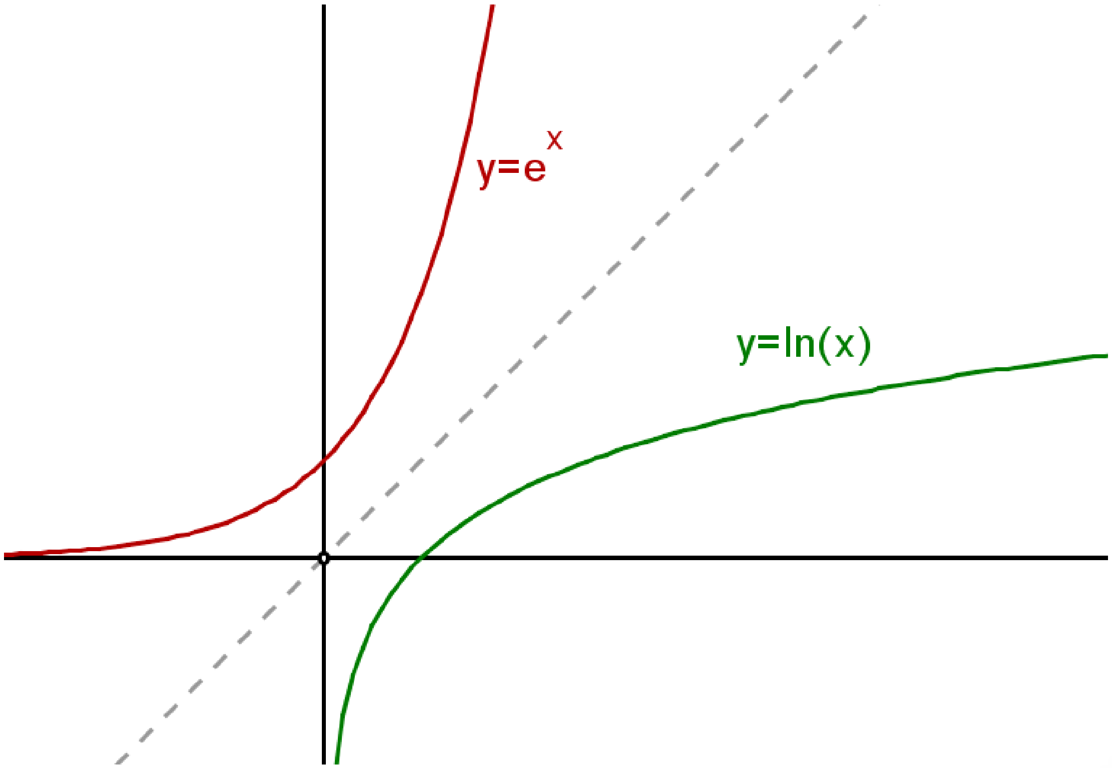
Exponenciální funkce

- Exponenciální funkce $y = a^x, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, (D_f = \mathbb{R})$
  Funkce je pro $a > 1$ rostoucí na $\mathbb{R}$ a pro $a < 1$ klesající na $\mathbb{R}$.
  Speciálními případy jsou dekadická exponenciální funkce $y = 10^x$ a přirozená exponenciální funkce $y = e^x$, kde e je tzv. Eulerovo číslo, $e \doteq 2{,}71 \ldots$

Leonhard Euler (1707 – 1783)

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce $y = log_a x,\ a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $(D_f = \mathbb{R}^+)$ je inverzní k exponenciální funkci. Funkci $y = log_{10} x$ značíme jen jako $y = \log x$ a nazýváme dekadickým logaritmem, funkci $y = log_e x$ značíme jako $y = \ln x$ a nazýváme přirozeným logaritmem.



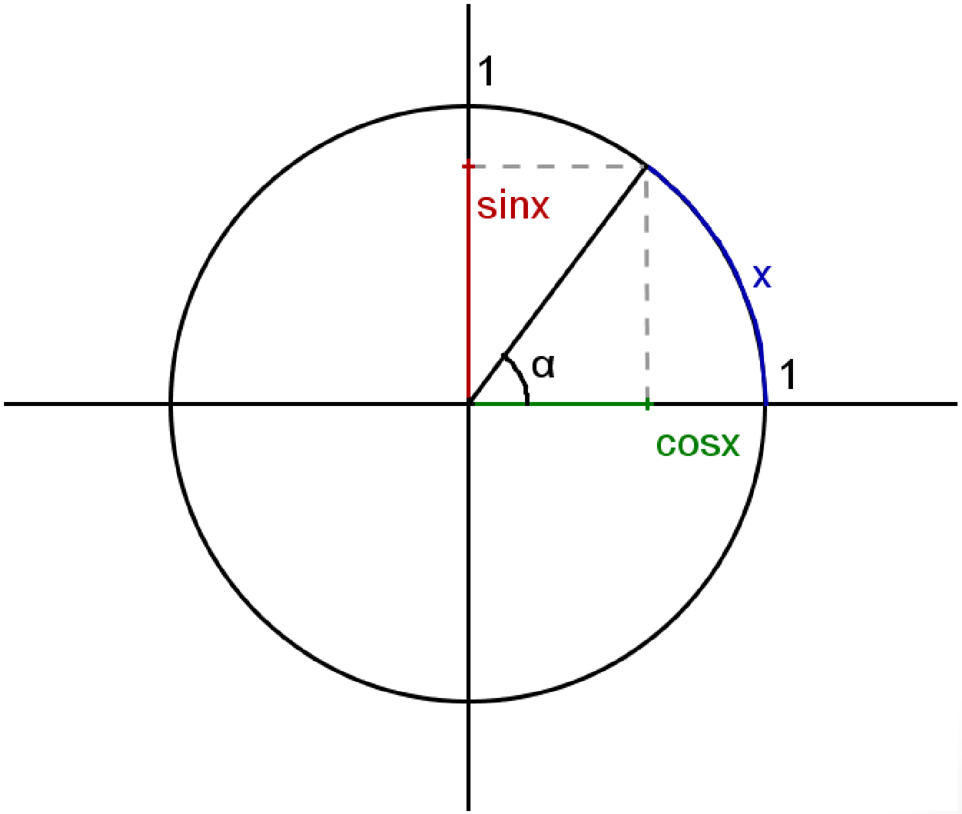
Pravidla pro počítání s logaritmy

Poznámka: pro $\forall\ a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ a $s \in \mathbb{R}$ platí:

- $log_a(x_1 . x_2) = log_a(x_1) + log_a(x_2)$
- $log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = log_a(x_1) - log_a(x_2)$
- $log_a(x^s) = s.\ log_a(x)$
- $log_b x = log_a x . log_b a$

Goniometrické funkce

Definujme nejprve funkce sinus, kosinus pomocí jednotkové kružnice (Velikost úhlů zadáváme v obloukové míře):



Převod na obloukovou míru:

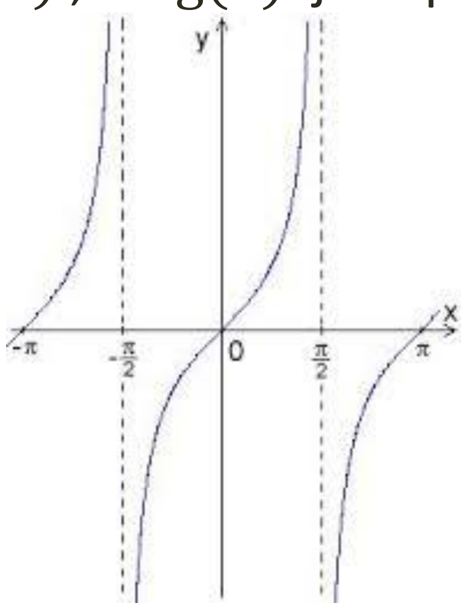
- $\alpha = 90° \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $\alpha = 180° \Rightarrow x = \pi$
- $\alpha = 60° \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$
- $\alpha = 45° \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

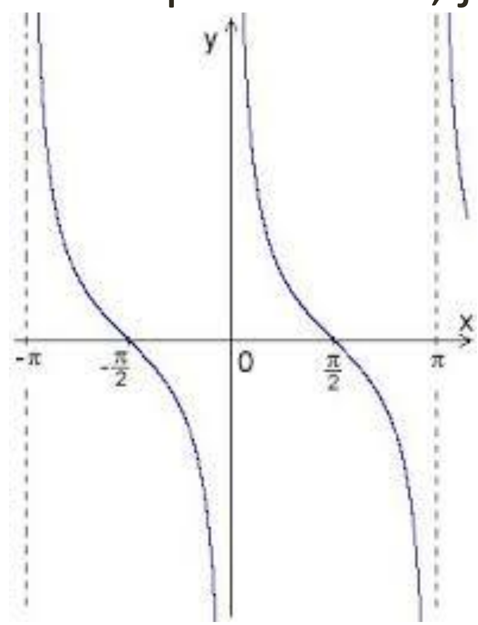
Goniometrické funkce

Funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou periodické s periodou 2π, jejich $D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1,1 \rangle$.

Dále definujeme: $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $(D_f = \{x \in \mathbb{R}: cos(x) \neq 0\}$, tj. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\})$ a $cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $(D_f = \{x \in \mathbb{R}: sin(x) \neq 0\}$, tj. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm k\pi, k \in \mathbb{Z}\})$

Funkce $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{cotg}(x)$ jsou periodické s periodou π, jejich $H_f = \mathbb{R}$.





Funkce cyklometrické

Funkce inverzní ke goniometrickým.

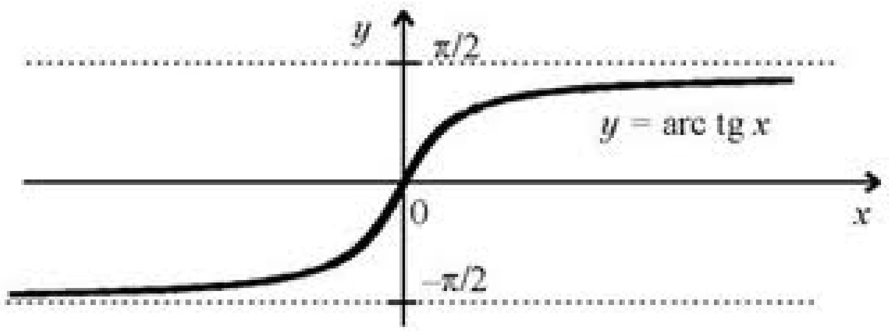
Pro $x \in \langle -1,1 \rangle$ definujeme

- $\arcsin x = u \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, pro něž $\sin u = x$
- $\arccos x = u \in \langle 0, \pi \rangle$, pro něž $\cos u = x$

Příklad: Určete $\mathrm{x} \in \langle 0, \pi \rangle$, pro které je $\cos(\mathrm{x}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

- $\operatorname{arctg} x = u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pro něž $\operatorname{tg} u = x$
- $\operatorname{arccotg} x = u \in (0, , \pi)$, pro něž $\operatorname{cotg} u = x$



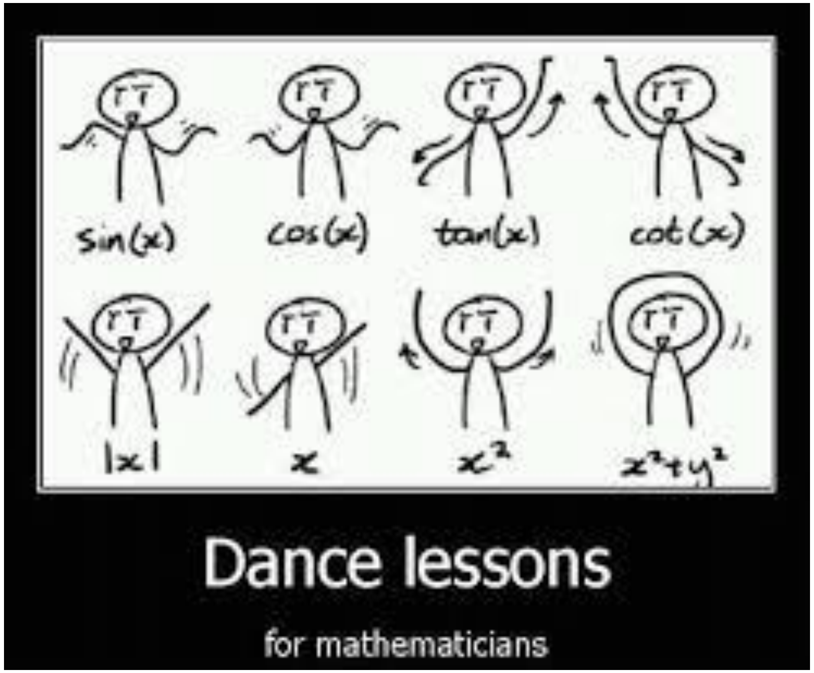
Goniometrické vzorce

Poznámka: Pro goniometrické funkce platí tzv. součtové vzorce:

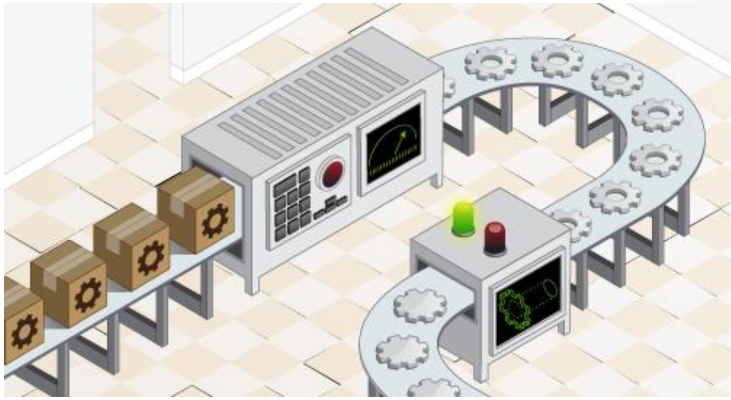
- $\sin 2x = 2 \sin x . \cos\ x$
- $\cos 2x = \ cos^2x - sin^2x$
- $1 = \ cos^2x + sin^2x$

Příklad: S využitím uvedených vztahů vyjádřete pomocí $\cos 2x$ následující funkce:

- $cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
- $sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$



Nové funkce ze starých: skládání



- Uvažujme funkci $u = \varphi(x)$ z A na B. Dále uvažujme funkci $y = f(u)$ z B na C. Definujme funkci $F: A \longrightarrow B$ předpisem $F(x) = f(\varphi(x))$. Funkci F nazýváme složenou funkcí, f nazýváme její vnější složkou a φ její vnitřní složkou.
- Příklad: Funkci $F(x) = \frac{1}{x+1}$ můžeme chápat jako funkci složenou z vnitřní složky $\varphi(x) = x + 1$ z vnější složky $f(u) = \frac{1}{u}$
- Příklad: Určete složenou funkci $f(g(h(x)))$, je-li: $h(x) = x^2, g(x) = x + 1, \quad f(x) = \sqrt{x}$.
- Řešení: $f(g(h(x)))= \sqrt{x^2 + 1}$
- Příklad: Pro prostou funkci $f(x)$ určete $f^{-1}(f(x))$

Funkce definované po částech

- Někdy je funkce definována na různých intervalech různými předpisy. Jako příklad můžeme uvést zavedení funkce absolutní hodnota: $|x| = \begin{cases} x, & \text{pro} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{pro} \quad x < 0 \end{cases}$
- Dalším příkladem je po částech konstantní funkce celá část: $\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{N}: n \leq x < n + 1$
- Progresivní zdanění lze modelovat po částech lineární funkcí. Například sazba daně z příjmu v USA činila 10% pro příjem do 8350$, každý dodatečný dolar (až do výše 33950 $) byl pak daněn sazbou 15% , atd. Výše daně y by pak byla dána dle velikosti příjmu x jako

$$\mathrm{y} = \begin{cases} 0{,}1 \cdot x, & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq 8350 \\ 835 + 0{,}15 \cdot x, & \text{pro} \quad 8350 < x \end{cases}$$

Nové funkce ze starých:symetrie, vertikální a horizontální posunutí

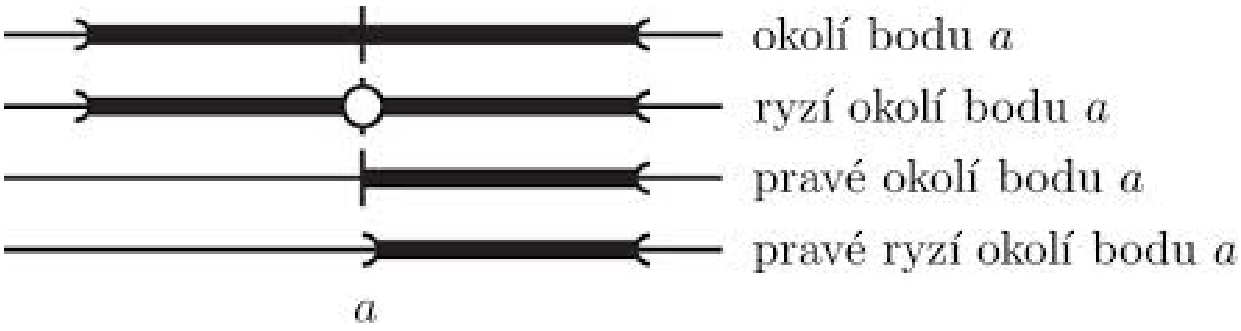
Známe-li graf funkce $y = f(x)$, můžeme vytvořit graf funkce

- $y = f(-x)$ překlopením podle osy y
- $y = -f(x)$ překlopením podle osy x
- $y = f(x + c)$ posunutím o c jednotek doleva (při $c > 0$), resp. doprava při (při $c < 0$)
- $y = f(x) + c$ posunutím o c jednotek nahoru (při $c > 0$), resp. dolů při (při $c < 0$)

Příklad: načrtněte graf funkce $y = |\log|x||$

Okolí

- Pro bod $a \in \mathbb{R}$ a číslo $\delta > 0$ definujeme $\delta -$ okolí bodu a jako interval $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$. Někdy není nutné uvádět δ, pak okolí a označujeme $U(a)$ a chápeme jako malý otevřený interval obsahující a. Zavádí se též pojmy levé okolí, pravé okolí a ryzí okolí bodu a (jako $U(a) - \{a\}$)



Spojitost funkce

- Definice: Nechť $y = f(x)$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu I a bod $a \in I$. „Řekneme, že f je spojitá v bodě a, jestliže pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ platí, že pro všechna x z nějakého okolí bodu a platí: $f(x) \doteq f(a)\ (\pm\varepsilon)$"
- Poznámka: definujeme též spojitost zprava pro pravé okolí, resp. zleva pro levé okolí.