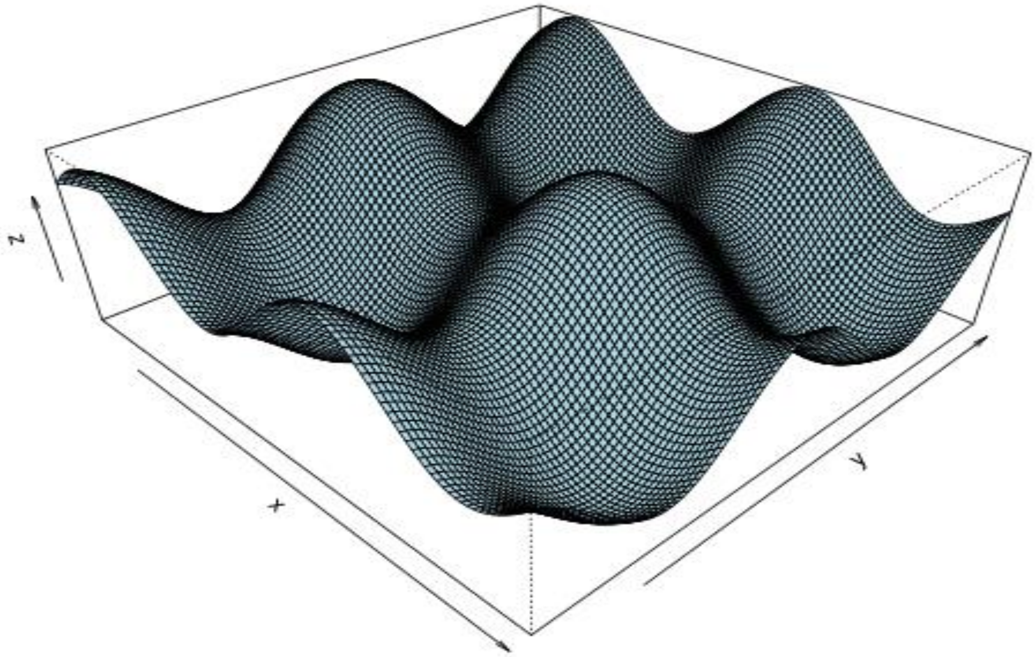
Funkce více proměnných



Funkce více proměnných

Definice: Pro $n \in \mathbb{N}$, uvažujme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (prostor uspořádaných n-tic reálných čísel). Zobrazení množiny D do $\mathbb{R}$ nazveme funkcí n proměnných. Píšeme $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$. **Poznámka:** Není-li řečeno jinak, definičním oborem D funkce f chápeme největší množinu, na které má definiční výraz smysl.

Poznámka: Budeme požívat euklidovskou metriku (resp. vzdálenost): vzdálenost mezi $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ a $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n] \in \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

Obdobně jako u funkce jedné proměnné tedy můžeme definovat okolí bodu $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^n$. Pro $\delta > 0$ nazveme δ - okolím bodu A množinu všech bodů z $\mathbb{R}^n$, jejichž vzdálenost od bodu A je menší než δ: $U_\delta(A) = \{X \in \mathbb{R}^n, \rho(X, A) < \delta\}$

Limita funkce více proměnných

Definice: Říkáme, že funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ má v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$ limitu rovnu $A \in \mathbb{R}$ a píšeme $\boxed{\lim\limits_{X \to X^0} f(X) = A,}$

jestliže pro $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$ tak, že $f(X)$ je definovaná v ryzím okolí $U_\delta(X^0) \setminus \{X^0\}$ a pro všechna X z tohoto okolí platí:

$\boxed{|f(X) - A| < \varepsilon}$ (tj. pro všechna X „blízká“ X^0 platí $f(X) \approx A$.)

Poznámka: Pro počítání s limitami platí analogická pravidla jako u funkce jedné proměnné. Obdobně se zavádějí i nevlastní limity.

Definice: Řekneme, že funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je spojitá v bodě $X^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]$, jestliže má v tomto bodě limitu a platí:

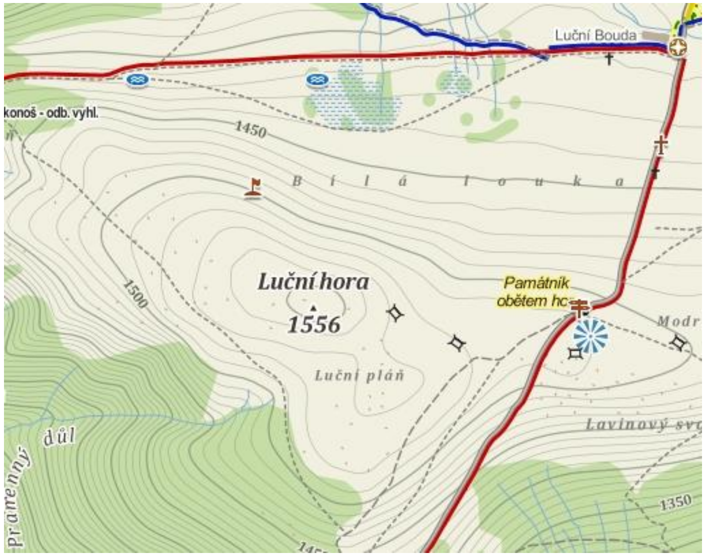
$$\boxed{\lim_{X \to X^0} f(X) = f(X^0).}$$

Příklad: Funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ je spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$ kromě bodu $[0,0]$.

Poznámka: Další úvahy budeme provádět pro funkce dvou proměnných, lze je však zobecnit i pro $n > 2$.

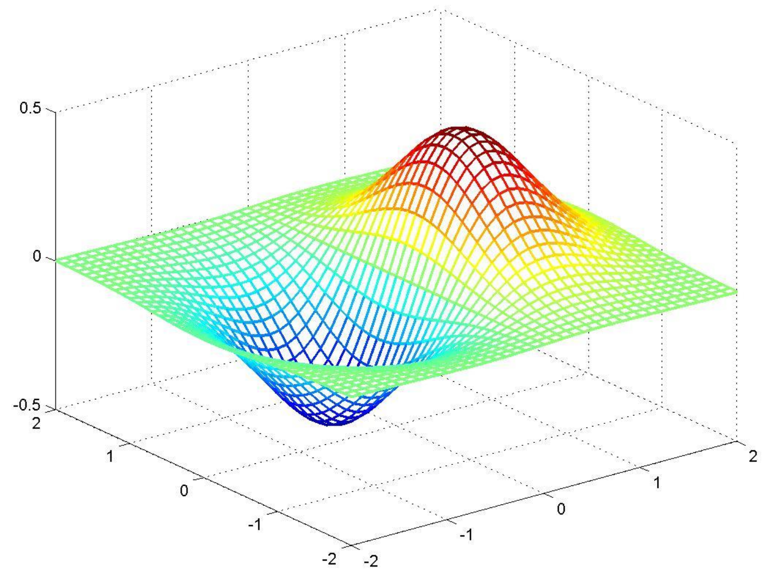
Grafické znázornění funkce dvou proměnných

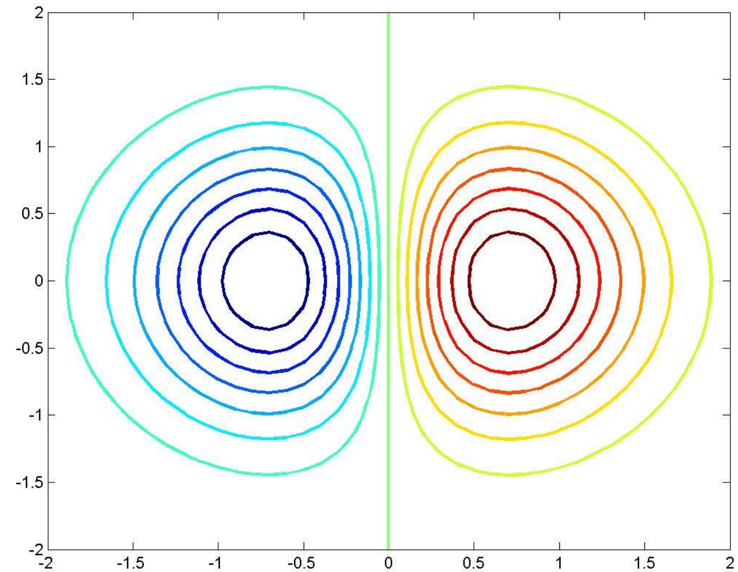
V třírozměrném prostoru si můžeme graf funkce dvou proměnných představit jako zemský povrch. Pro znázornění povrchu ve 2D se používají většinou vrstevnice funkce.



Grafické znázornění funkce dvou proměnných

Podobným způsobem si můžeme znázornit třeba funkci $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{x}{e^{x^2+y^2}}$.





Vrstevnicí funkce $f(x, y)$ "o nadmořské výšce c" rozumíme množinu všech bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ takových, že platí $f(x, y) = c$. Například pro výše uvedenou funkci $f(x, y)$ určíme nultou vrstevnici jako množinu všech řešení rovnice o dvou neznámých $\frac{x}{e^{x^2+y^2}} = 0$. Zřejmě musí být $x = 0$, ale y je libovolné, tedy dostaneme množinu $\{[0, y],\ y \in \mathbb{R}\}$.

Parciální derivace

Uvažujme nejprve funkci dvou proměnných $f(x,y)$ a položme y rovno konstantě y_0. Dostaneme funkci jedné proměnné, označme ji $g(x) = f(x,y_0)$.

Jestliže má tato funkce derivaci v bodě x_0, tj. existuje-li $g'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0}$, nazveme ji parciální derivací funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ podle proměnné x. Označujeme ji

$f'_x(x_0,y_0)$ nebo $f_x(x_0,y_0)$ nebo $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$.

Analogicky se definuje parciální derivace podle y.

Poznámka: Pro funkci n proměnných se parciální derivace definují obdobně. Derivujeme-li podle x_i, ostatní proměnné považujeme za konstanty. Parciální derivace funkce $f(X)$ v bodě X^0 značíme například $f'_{x_1}(X^0), f'_{x_2}(X^0), \dots, {f_{x_n}}'(X^0)$.

Příklad: Funkce $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 5xy - 4x + y - 1$ má parciální derivace $f'_x(x,y) = 2x + 0 + 5y - 4 + 0$ a $f'_y(x,y) = 0 + 6y + 5x - 0 + 1$.

Příklad: Funkce $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z^2}$ má parciální derivace

$$f'_x(x,y,z) = \frac{1\cdot(y+z^2) - x\cdot 0}{(y+z^2)^2} = \frac{1}{(y+z^2)},$$

$$f'_y(x,y,z) = \frac{0\cdot(y+z^2) - x\cdot 1}{(y+z^2)^2} = \frac{-x}{(y+z^2)^2},$$

$$f'_z(x,y,z) = \frac{0\cdot(y+z^2) - x\cdot 2z}{(y+z^2)^2} = \frac{-2xz}{(y+z^2)^2}$$

http://demonstrations.wolfram.com/PartialDerivativesIn3D/

Parciální derivace vyšších řádů

Uvažujme oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, kde má funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivaci podle x_i $(i \in \{1, \dots, n\})$. Pokud má funkce f_{x_i} v nějakém bodě $X_0 \in \Omega$ derivaci podle x_j, nazveme ji parciální derivací druhého řádu podle x_i a x_j a značíme

$$f_{ij}(X_0) \text{ nebo } f''_{ij}(X_0) \text{ nebo } \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

Poznámka: Jestliže $i = j$, píšeme též f''_i nebo $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}$.

Příklad: Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^3 - xyz$.

Řešení: Derivace prvního řádu jsou

$$\begin{aligned} f_x &= 6x - yz, \\ f_y &= 2y - xz, \\ f_z &= 3z^2 - xy, \end{aligned}$$

Dále spočteme derivace druhého řádu

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6, & f_{xy} &= -z, & f_{xz} &= -y, \\ f_{yx} &= -z, & f_{yy} &= 2, & f_{yz} &= -x, \\ f_{zx} &= -y, & f_{zy} &= -x, & f_{zz} &= 6z. \end{aligned}$$

Věta: Jestliže má funkce f spojité parciální derivace až do řádu k v nějakém okolí $U_\delta(X_0)$ bodu X_0, nezáleží na pořadí, ve kterém derivujeme, tedy např.

$$f''_{ij}(X_0) = f''_{ji}(X_0).$$

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce $f(X)$ má lokální minimum v bodě $X^0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže existuje okolí $U_\delta(X^0)$ takové, že pro všechna $X \in U_\delta(X^0)$ platí: $\boxed{f(X^0) \leq f(X)}$. Analogicky lokální maximum.

Poznámka: V případě ostrých nerovností mluvíme o ostrých lokálních extrémech.

Věta: Má-li funkce $f(X)$ v bodě X^0 lokální extrém, pak všechny parciální derivace, které zde existují, musí být rovny 0.

Poznámka: Bod, ve kterém jsou všechny parciální derivace nulové, nazýváme stacionární.

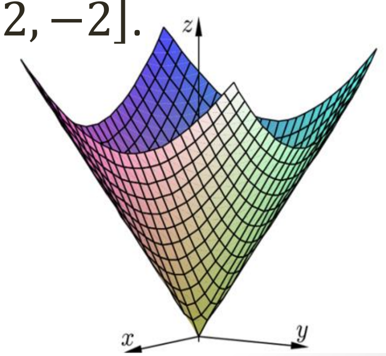
Příklad: Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$.

Řešení: $f_x' = 3x^2 + 6y$, $f_y' = 6y + 6x$.

Rovnice pro stacionární bod jsou $3x^2 + 6y = 0, 6y + 6x = 0$.

Z druhé rovnice dostaneme $y = -x$ a po dosazení do první dostaneme kvadratickou rovnici $3x^2 - 6x = 0$, jejíž kořeny jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Potom $y_1 = 0$, $y_2 = -2$. Stacionární body jsou $[0{,}0]$, $[2, -2]$.

Příklad: Funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ má minimum v bodě $[0{,}0]$, kde parciální derivace $f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ nejsou definovány.



Lokální extrémy

Věta: Uvažujme funkci $f(x,y)$ a její stacionární bod $[x_0, y_0]$. Pokud jsou v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu, položíme

$$\boxed{\Delta(x_0, y_0) = f''_x(x_0, y_0) \cdot f''_y(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2}$$

V případě, že $\Delta(x_0, y_0) < 0$, není v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, potom bod $[x_0, y_0]$ nazýváme sedlový bod. Je-li $\Delta(x_0, y_0) > 0$, je v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém, a to minimum pro $f''_x(x_0, y_0) > 0$ a maximum pro $f''_x(x_0, y_0) < 0$.

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + 3y^2 + 6xy + 1$, jejíž stacionární body $[0,0]$, $[2,-2]$ jsme určili výše.

Řešení: Nejprve spočteme parciální derivace druhého řádu, zderivujeme funkce $f'_x = 3x^2 + 6y$ a $f'_y = 6y + 6x$:

$f''_x = 6x$, $f''_{xy} = 6$,

$f''_{yx} = 6$, $f''_y = 6$,

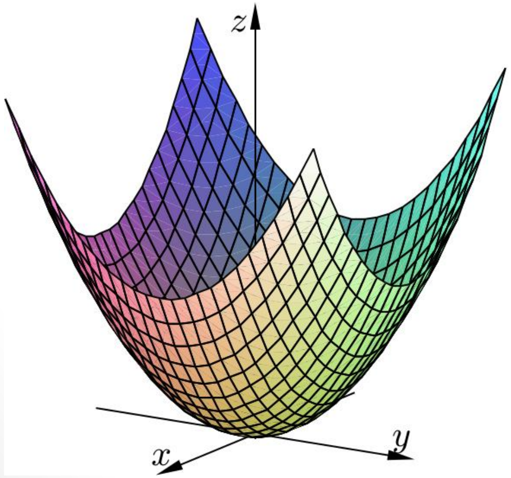
Tedy $\Delta(x,y) = 6x \cdot 6 - 6 \cdot 6$. Prověříme jeho hodnotu ve stacionárních bodech: V bodě $[0,0]$ dostaneme hodnotu

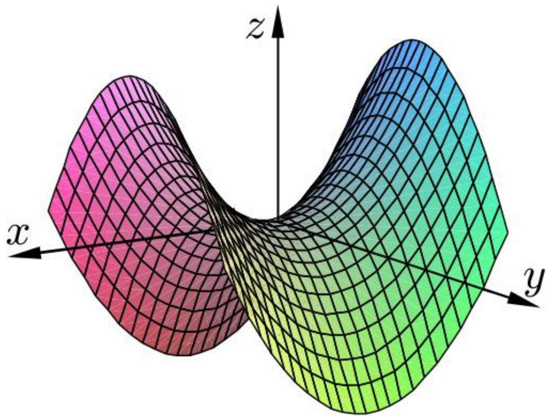
$\Delta(0,0) = 0 - 6 \cdot 6 = -36 < 0$, tedy $[0,0]$ je tedy sedlový bod. Pro $[2,-2]$ dostaneme $\Delta(2,-2) = 12 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 36 > 0$, jde tedy o extrém a protože $f''_x(2,-2) = 12 > 0$, je v bodě $[2,-2]$ lokální minimum.

Lokální extrémy

Příklad:

1. Funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ má ve stacionárním bodě $[0{,}0]$ minimum, druhé derivace jsou $f_x'' = 2, f_{xy}'' = f_{yx}'' = 0, f_y'' = 2$, tedy hodnota $\Delta(0{,}0) = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$
2. Funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ má stacionární bod $[0{,}0]$, kde není extrém, ale sedlový bod, $f_x'' = 2, f_{xy}'' = f_{yx}'' = 0, f_y'' = -2$, tedy hodnota $\Delta(0{,}0) = 2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0$.





•