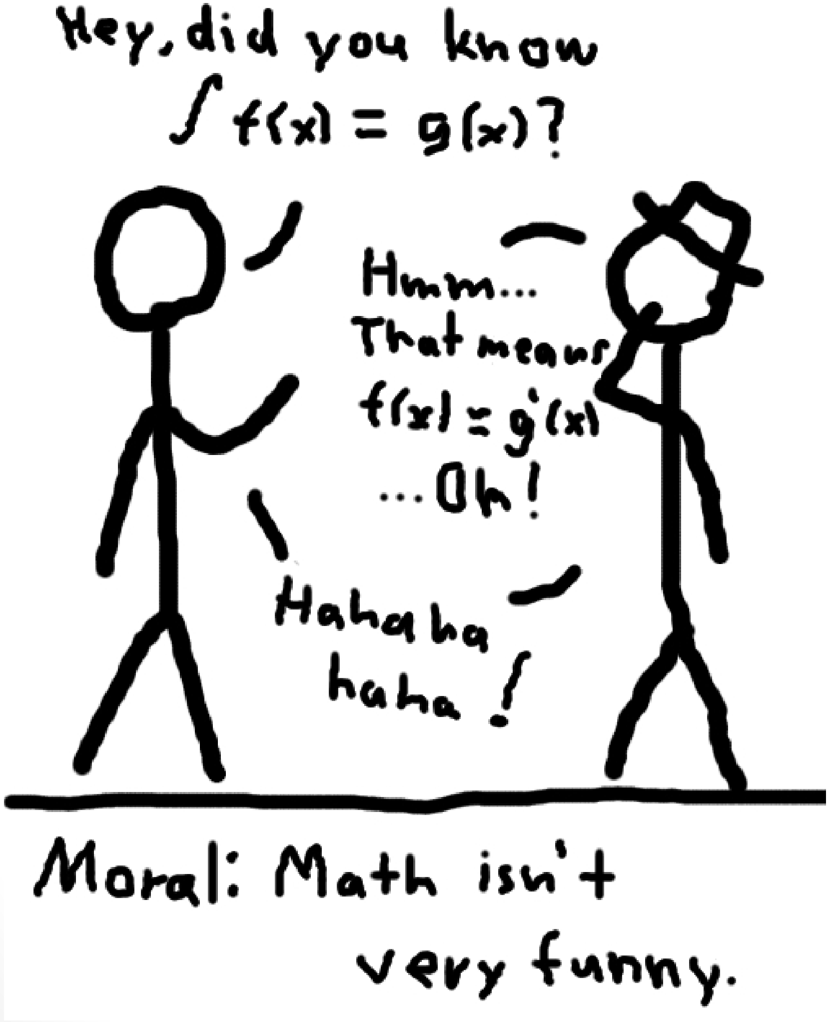
Integrál


Hey, did you know
∫ f(x) = g(x)?
Hmm...
That means
f(x) = g'(x)
...Oh!
Hahaha
haha!
Moral: Math isn't
very funny.

Primitivní funkce

Definice: Jestliže $F(x)$ a $f(x)$ jsou takové funkce, že pro všechna x z intervalu I platí $\boxed{f(x) = F'(x)}$, pak řekneme, že $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu I.

Příklad: Funkce $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 5$ je primitivní k funkci $f(x) = 3x^2 + x + 3$ na $\mathbb{R}$, protože zde platí $f(x) = F'(x)$.

Poznámka: Je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I, pak funkce $F(x)$ je zde spojitá (dokonce má derivaci). Jaké podmínky musí splňovat $f(x)$? Postačující podmínkou k tomu, aby k $f(x)$ existovala primitivní funkce je spojitost $f(x)$ na I. Je primitivní funkce určena jednoznačně?

Příklad: Funkce $G(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 7$ je také primitivní k funkci $f(x) = 3x^2 + x + 3$ z předchozího příkladu.

Věta: Jsou-li funkce $F(x)$ a $G(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, taková, že pro $\forall x \in I$: $F(x) = G(x) + c$.

Neurčitý integrál

Definice: Množinu všech funkcí primitivních k $f(x)$ na I nazýváme neurčitý integrál $f(x)$ na I a značíme $\int f(x)\,dx$. Píšeme

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c,}$$

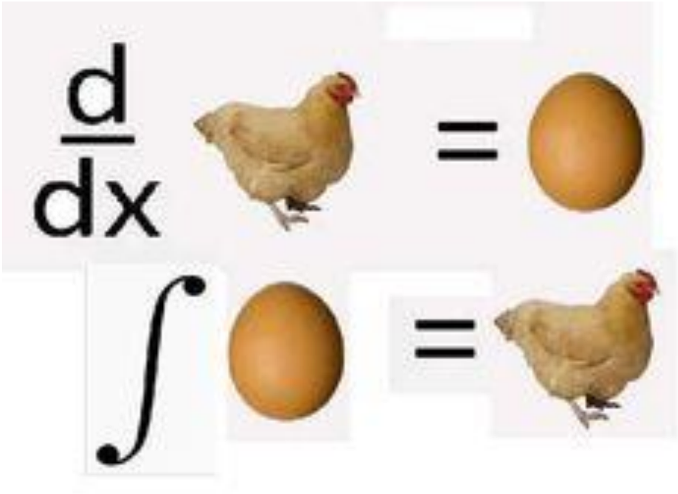
kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na I, dx je diferenciál x a c tzv. integrační konstanta.

Příklad: Najděte neurčité integrály

$$\int \sin x \; dx$$
$$\int x^3\,dx$$
$$\int e^{2x}\; dx$$

Řešení: $\int \sin x \; dx = -\cos x + c$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$$
$$\int e^{2x}\; dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$$



Základní neurčité integrály

- $\int 0\, dx = c,$
- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1,$
- $\int e^x\, dx = e^x + c,$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c,$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c,$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + c,$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c,$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg(x) + c,$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -cotg(x) + c$

(Vztah platí vždy na intervalu, kde je integrovaná funkce spojitá)

Pravidla pro integrování

Věta: Integrace lineární kombinace funkcí:

Jestliže funkce $f_1(x), f_2(x), \dots\ f_n(x)$ mají na I neurčité integrály, pak pro libovolné konstanty $c_1, c_2, \dots\ c_n$ existuje neurčitý integrál funkce $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$ a platí:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + c_2 \int f_2(x)\,dx + \cdots + c_n \int f_n(x)\,dx}$$

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int \left(e^x + \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x}\right)\,dx$

Řešení: $\int \left(e^x + \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x}\right)\,dx = \int e^x dx + 2\int \frac{1}{x^2+1} dx + 3\int \frac{1}{x} dx = e^x + 2 \operatorname{arctg} x + 3 \ln|x| + c$

Věta: Metoda per partes:

Jestliže funkce $u(x), v(x)$ mají na otevřeném intervalu I spojité derivace, pak platí:

$$\boxed{\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx}$$

Metoda per partes - příklady

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x \cdot \sin x \; dx$

Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = \sin x, v(x) = x$.
Dopočítáme $u(x) = -\cos x, v'(x) = 1$ a dosadíme:

$\int x \cdot \sin x \; dx = -x \cos x - \int (-\cos x)\, dx = -x \cos x + \sin x + c$.

Poznámka: Někdy je nutné použít pravidlo opakovaně.

Příklad: Najděte neurčitý integrál $\int x^2 \cdot e^x \, dx$.

Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = e^x, v(x) = x^2$.
Dopočítáme $u(x) = e^x, v'(x) = 2x$ a dosadíme:

$\int x^2 \cdot e^x \; dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \; dx$ Per partes zopakujeme pro $u'(x) = e^x, v(x) = 2x$, tedy $u(x) = e^x, v'(x) = 2$.

$$\int x^2 \cdot e^x \; dx = x^2 \cdot e^x - \left[2x \cdot e^x - \int 2e^x \, dx\right] =$$

$$x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + c.$$

Výpočet integrálu substitucí:

Integrál typu $\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx$ můžeme řešit substitucí.

Postup řešení je následující:

- Zvolíme substituci $y = \varphi(x)$.
- Vypočítáme $dy = \varphi'(x)\,dx$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(x)$ a $\varphi'(x)\,dx$ a dostaneme $\int f(y)\,dy$.
- Vypočítáme $F(y) = \int f(y)\,dy$.
- Určíme interval I, na kterém platí $F'(\varphi(x)) = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$.
- Hledaný integrál je

$$\boxed{\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = F\big(\varphi(x)\big) + c, x \in I.}$$

Integrace substitucí - příklady

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}\ dx$.

Řešení: $\int e^{3x+1}\ dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}\cdot 3\ dx = \begin{vmatrix} \text{substituce} & u = 3x+1 \\ & du = 3\,dx \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{3}\int e^{u}\,du = \frac{1}{3}e^{u} + c = \frac{1}{3}e^{3x+1} + c, x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1}\ dx$.

Řešení: $\int \frac{x}{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx = \begin{vmatrix} \text{substituce} & u = x^2+1 \\ & du = 2x\,dx \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c, x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Pro funkci $\varphi(x)$, která je nenulová na intervalu I a má zde derivaci $\varphi'(x)$ platí:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + c, \quad x \in I: \varphi(x) \neq 0.$$