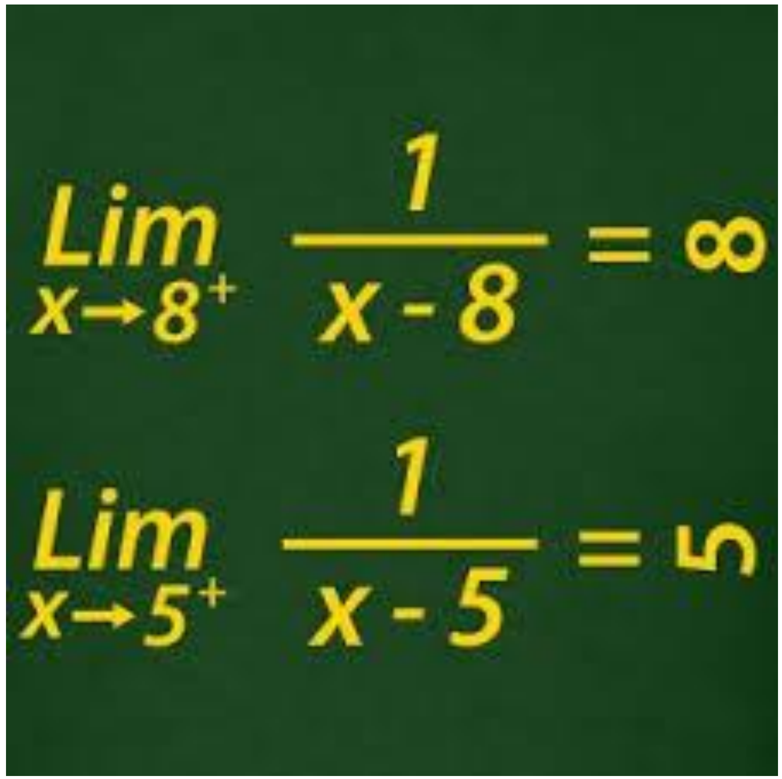
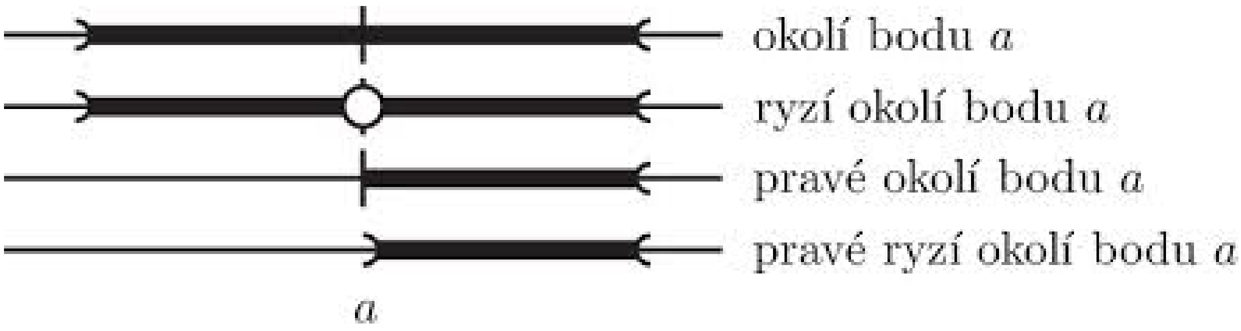
Limity



Okolí

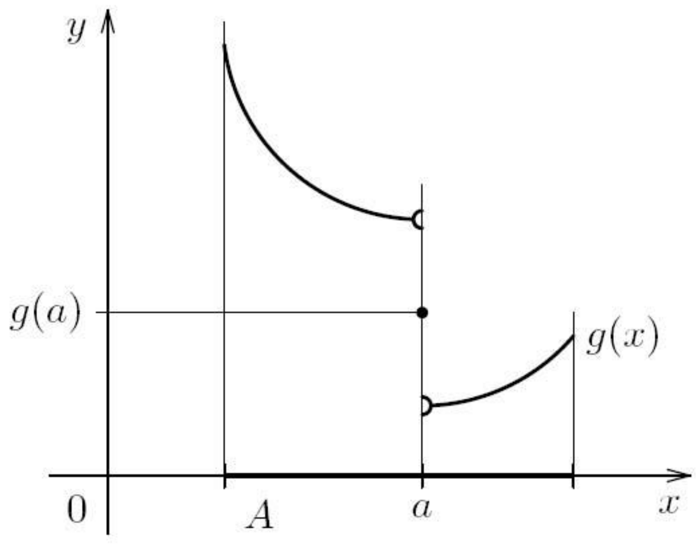
Pro bod $a \in \mathbb{R}$ a číslo $\delta > 0$ definujeme $\delta -$ okolí bodu a jako interval $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$. Někdy není nutné uvádět δ, pak okolí a označujeme $U(a)$ a chápeme jako malý otevřený interval obsahující a. Zavádí se též pojmy levé okolí, pravé okolí a ryzí okolí bodu a (jako $U(a) - \{a\}$)

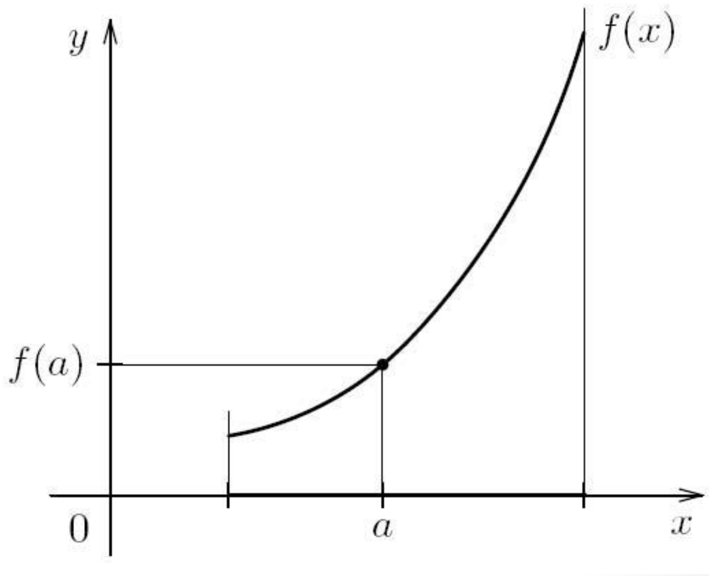


Spojitost funkce

Definice: Uvažujme funkci $y = f(x)$ definovanou na otevřeném intervalu I a bod $a \in I$. Řekneme, že f je spojitá v bodě a, jestliže „pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ platí, že všechna x z nějakého okolí bodu a splňují: $f(x) \doteq f(a)\ (\pm\varepsilon)$“

Poznámka: definujeme též spojitost zprava pro pravé okolí, resp. zleva pro levé okolí. Funkce je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá v každém vnitřním bodě a v krajních bodech je spojitá zprava (resp. zleva). Všechny elementární funkce jsou spojité na svých Df.





Definice limity

Definice: Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 rovnu číslu α, jestliže „pro libovolnou přesnost $\varepsilon > 0$ existuje ryzí okolí $U_\delta(x_0)$ takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε)“.

Potom píšeme

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha}$$

Poznámka:

Hodnota limity v bodě x_0 nezávisí na $f(x_0)$. Pokud je funkce $f(x)$ v bodě x_0 spojitá, pak zřejmě v tomto bodě má limitu a platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Příklad: Určete limitu $\lim_{x \to 3} \frac{x+5}{x+1}$

Řešení: Funkce $\mathrm{f(x)} = \frac{x+5}{x+1}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Tedy $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = \frac{3+5}{3+1} = \frac{8}{4} = 2.$

http://demonstrations.wolfram.com/LimitOfAFunctionAtAPoint/

Výpočet limity

Funkce může mít limitu i v bodě, ve kterém není definovaná!

Příklad: Určete limitu $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Řešení: $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tedy funkce není v bodě $x_0 = 1$ spojitá. Určeme si několik hodnot funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.

x	**1,1**	**0,9**	**1,01**	**0,99**	**1,001**	**0,999**
f(x)	2,1	1,9	2,01	1,99	2,001	1,999

Závěr: Pro x "blížící se k 1" se hodnoty funkce "blíží k číslu 2".

Věta: Pokud v nějakém okolí bodu x_0 platí: $\forall x \neq x_0$: $f(x) = g(x)$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu právě tehdy když zde má limitu funkce $g(x)$ a platí

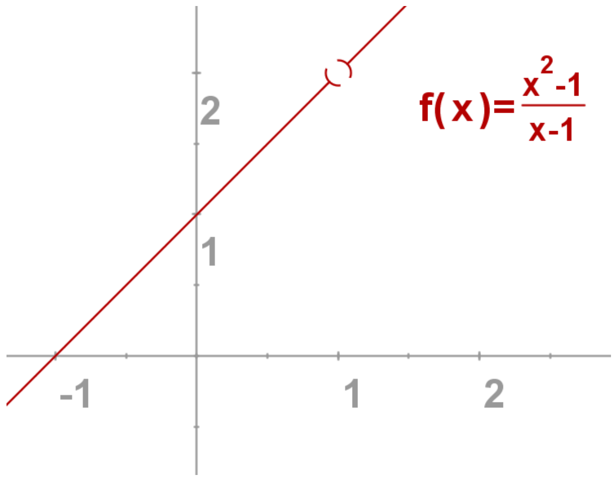
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)}$$

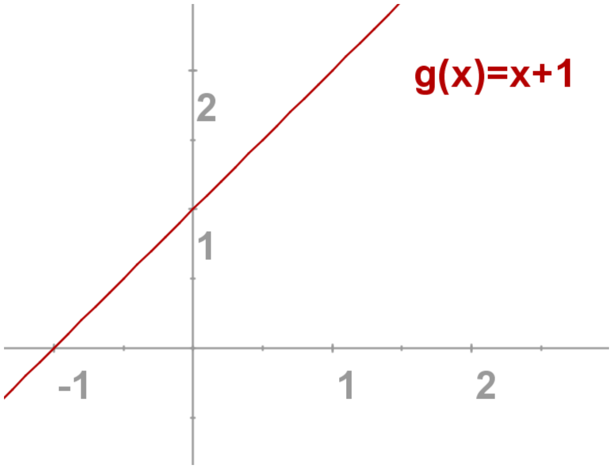
Limita funkce, příklad

Příklad: Určete limitu z předchozího příkladu užitím uvedené věty.

Řešení: Pro všechna $x \neq 1$ platí: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1.$

Tedy funkce $f(x)$ a $g(x) = x+1$ splňují předpoklady předchozí věty, a proto $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2.$





Jednostranná limita

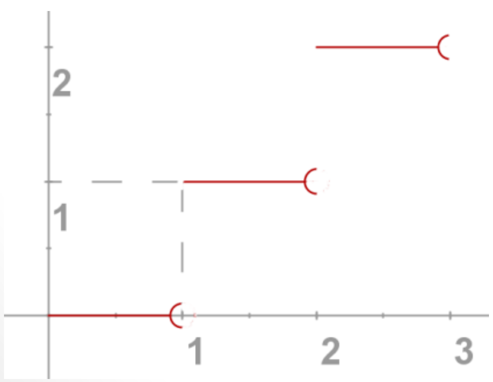
Nahradíme-li v definici limity okolí bodu x_0 pravým okolím $U_\delta^+(a)$, respektive levým okolím $U_\delta^-(a)$, dostaneme definici limity zprava, resp. zleva. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \text{ , resp. } \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

Příklad:

Určete $\lim_{x \to 1} f(x)$ pro funkci "celá část" $f(x) = \lfloor x \rfloor$ definované jako $\lfloor x \rfloor := n \in \mathbb{N}: n \leq x \wedge n + 1 > x$.

Řešení: Limita neexistuje, pro x "napravo od bodu $x_0 = 1$" platí $\lfloor x \rfloor = 1$, ale "nalevo od bodu $x_0 = 1$" platí $\lfloor x \rfloor = 0$. Existují pouze jednostranné limity $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1-} f(x) = 0$.

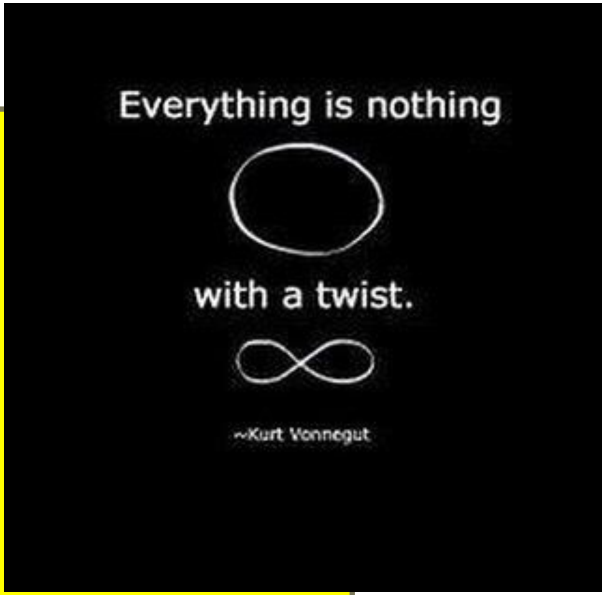


Rozšíření oboru reálných čísel

Definujeme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Symboly $\infty, -\infty$ nazýváme nevlastními čísly.

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$
- $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
- $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$
- $a \cdot \infty = \pm\infty\ ("+"\ \text{pro}\ a > 0, "-"\ pro\ a < 0)$
- $a \cdot (-\infty) = \pm\infty\ ("-"\ \text{pro}\ a > 0, "+"\ pro\ a < 0)$



Některé operace nejsou definovány, např. $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

Limity v nevlastních bodech

Řekneme, že funkce $f(x)$ má limitu v nekonečnu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká x: $f(x) \approx \alpha$ (s přesností ε)“. Píšeme

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha}$$

Analogicky se definuje limita v nevlastním bodě $-\infty$.

Poznámka: Definici lze vztáhnout i na případ $\alpha = \pm\infty$

Příklad: Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5}$

Řešení: Nejprve zkusme dosazovat do funkce "velká x".

x	5	95	995	9995	99995
f(x)	0,3	0,03	0,003	0,0003	0,00003

Vidíme, že hodnoty funkce klesají k nule, tedy $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x+5} = \frac{3}{\infty} = 0.$

http://demonstrations.wolfram.com/InfiniteLimitAtInfinity/

Nevlastní limity

U limit $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{a}{0}$, kde $a \neq 0$, platí:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \text{ je-li } \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ v nějakém okolí bodu } x_0,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \text{ je-li } \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ v nějakém okolí bodu } x_0,$$

jinak limita neexistuje.

Příklad: Vyšetřete všechny nevlastní limity funkce $f(x) = \frac{1}{x-2}$

Řešení: Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\infty} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Protože $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, zkusíme též spočítat limitu funkce v bodě $x_0 = 2$:

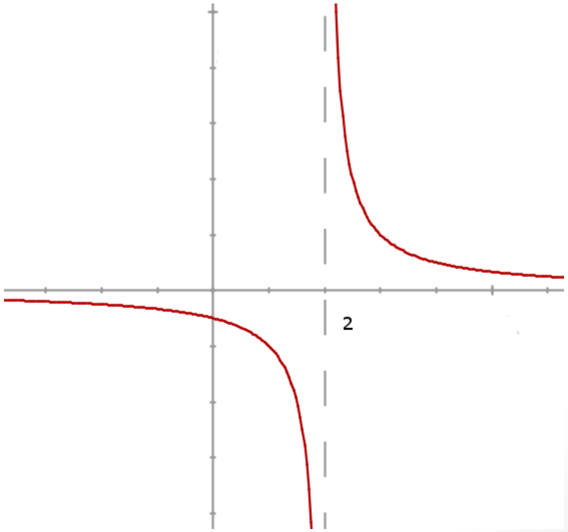
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ neexistuje, neboť $\frac{1}{x-2} > 0$ pro $x > 2$, ale $\frac{1}{x-2} < 0$ pro $x < 2$.

Platí pouze : $\lim\limits_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

Nevlastní limita a graf

- Jestliže $\lim_{x\to x_0\pm} f(x) = \pm\infty$, řekneme, že má funkce v bodě x_0 asymptotu bez směrnice (též svislou asymptotu): graf funkce se v pravém (resp. levém) okolí bodu x_0 blíží k přímce $x = x_0$.
- Jestliže $\lim_{\{x\to \infty\}} f(x) = \alpha$, (resp. $\lim_{\{x\to -\infty\}} f(x) = \alpha$), řekneme, že má funkce vodorovnou asymptotu : graf funkce se na pravé (resp. levé) straně blíží k přímce $y = \alpha$.

Příklad: Funkce z předchozího příkladu $f(x) = \frac{1}{x-2}$ má svislou asymptotu $x = 2$ a vodorovnou asymptotu $y = 0$.



Limita posloupnosti

Podobným způsobem jako limita funkce v nevlastním bodě se definuje limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

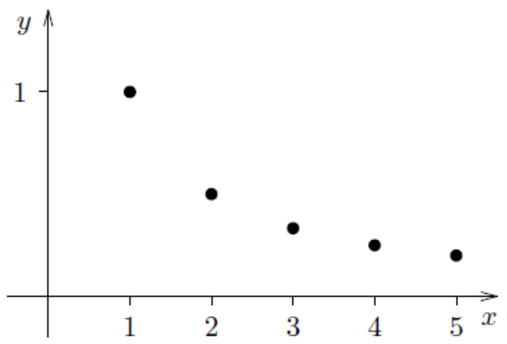
Definice: Řekneme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu v nekonečnu rovnu α, jestliže pro libovolnou přesnost ε platí pro všechna "dostatečně velká n: $a_n \approx \alpha$ (s přesností ε)". Píšeme

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha}$$

Takovou posloupnost pak nazveme v případě konečného α konvergentní.

Jestliže neexistuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, potom posloupnost nazýváme divergentní.

Na obrázku je znázorněno několik členů konvergentní posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$



http://demonstrations.wolfram.com/LimitsOfSequences/

Pravidla pro výpočet limit

Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ pro $x_0, A, B \in \mathbb{R}^*$, pak:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B,$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = A/B$$

pokud má pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$.

Příklad:

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+1}{3-x^2}$.

Řešení: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} = \frac{\infty}{-\infty}$, ale výraz na levé straně není definován.

Pro $x \neq 0$ můžeme zlomek upravit:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+1}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+1}{3-x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-1} = \frac{2+0+0}{0-1} = -2.$$

Limita složené funkce

Věta: Je-li $F(x) = f(\varphi(x))$ a funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, kde $a = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, pak

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} F(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right) = f(a)}$$

Příklad: $\lim\limits_{x \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sin 0 = 0.$

Poznámka:

U limit typu $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, apod. se někdy funkce rozšíří vhodným výrazem na podílový tvar.

Příklad: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \infty - \infty = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1/\infty = 0$