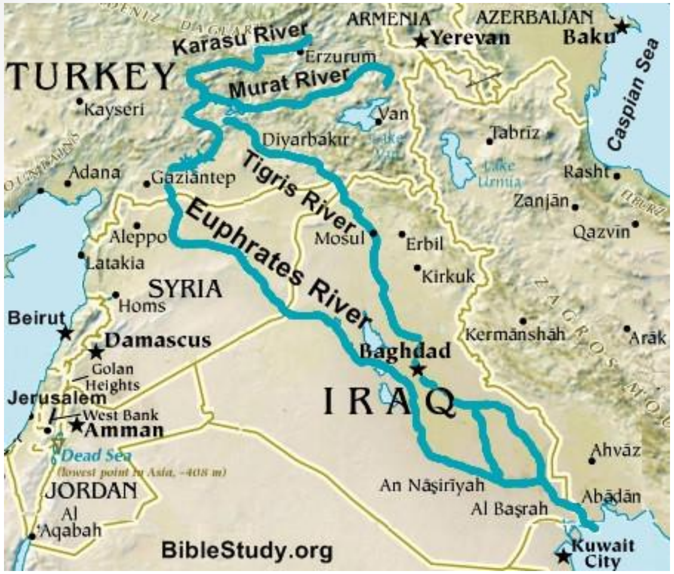
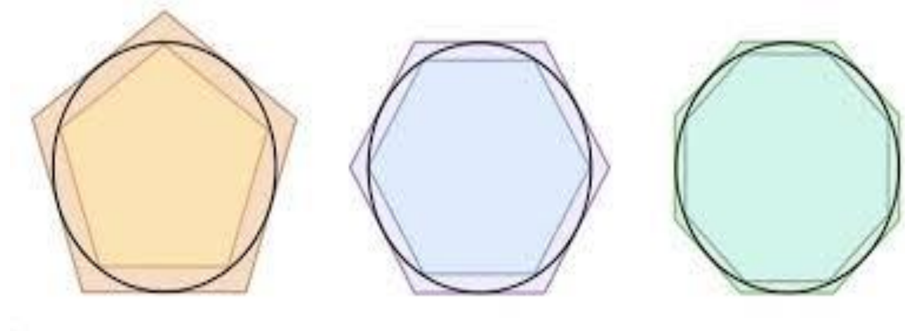
Určitý integrál

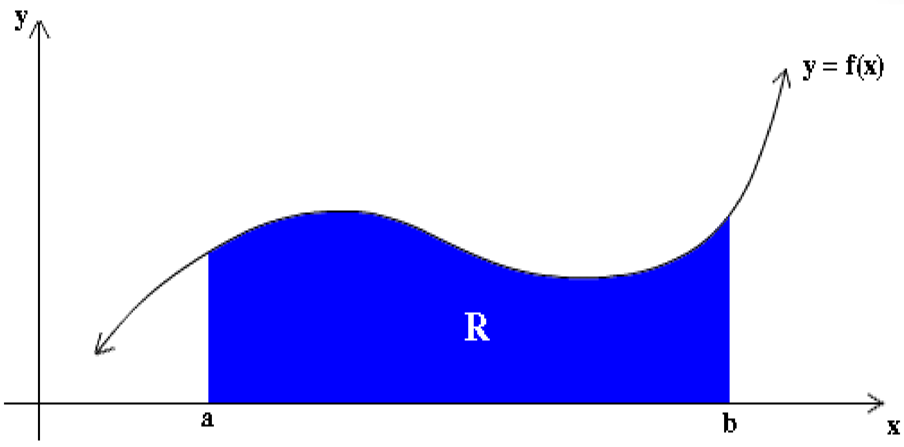




Eudoxos, Archimedes
Newton, Leibniz
Riemann

Zavedení určitého integrálu

Uvažujme graf funkce $f(x) \geq 0$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Určujeme obsah plochy R ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:



Rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na n částečných intervalů

$$\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \ldots, \langle x_n, x_{n+1} \rangle, \text{kde}$$
$$a = x_1 < x_2 < \cdots, x_n < x_{n+1} = b.$$

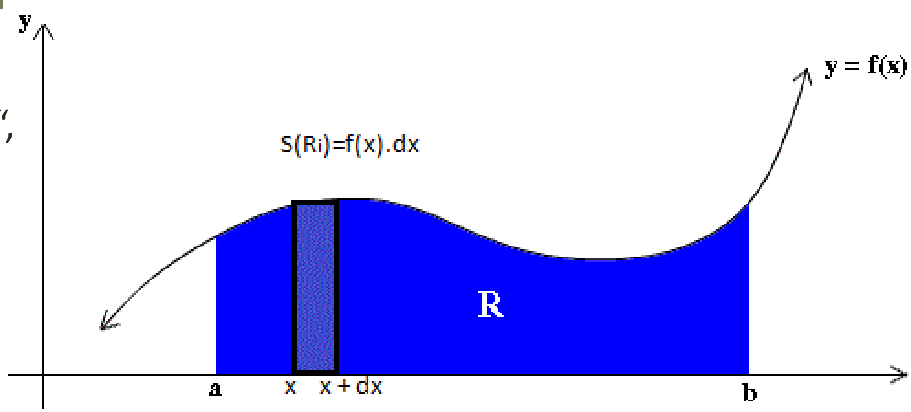
Hledaný plošný obsah lze odhadnout pomocí výrazu

$$\boxed{S(R) \approx \sum_{i=1}^{n} S(R_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).(x_{i+1} - x_i)}$$

Konverguje-li výraz pro „stále jemnější dělení“, píšeme $S(R) = \int_a^b f(x)dx$ a nazýváme jej určitým integrálem funkce na $\langle a, b \rangle$.

Číslo a nazýváme dolní mez integrálu, číslo b nazýváme horní mez integrálu. O funkci $f(x)$ říkáme, že je na daném intervalu integrabilní.

Poznámka: Pro existenci integrálu $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ stačí, aby zde funkce byla spojitá. (lze ukázat, že stačí i mírnější předpoklad)



http://demonstrations.wolfram.com/IntegrationByRiemannSums/

http://demonstrations.wolfram.com/ContinuousFunctionsAreIntegrable/

Určitý integrál - vlastnosti

Pojem určitého itegrálu lze rozšířit pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:

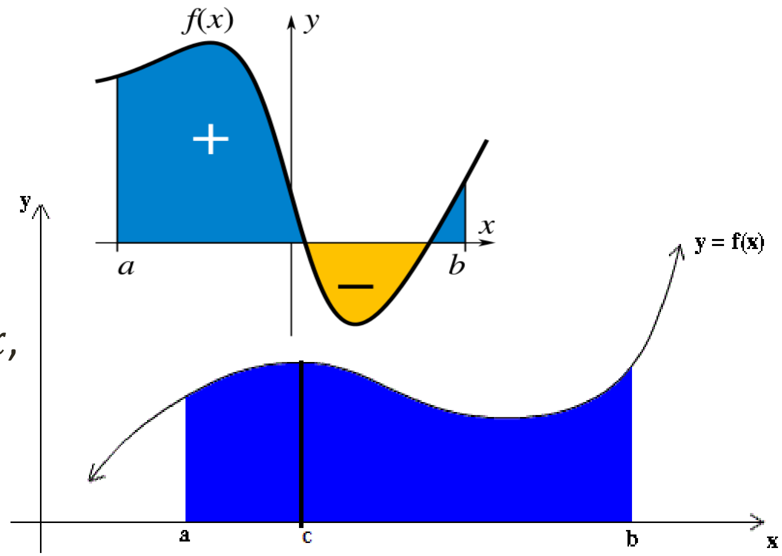
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \int_a^a f(x)dx = 0,$$

Pro f$(x) \leq 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx,$$

Věta: Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak na intervalu $\langle\, a, b \,\rangle$ platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Věta: Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na $\langle\, a, b \,\rangle$ a platí-li pro $\forall\, x \in \langle\, a, b \,\rangle$: $f(x) \geq g(x)$, pak také platí $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Věta: Pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na $\langle\, a, b \,\rangle$ a libovolné konstanty α, β je integrovatelná i funkce $\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$ a platí:

$$\int_a^b (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)dx\,.$$

Q#1,2

Určitý integrál - výpočet

Věta: Integrál jako funkce horní meze: Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b \rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí.

Věta: Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),}$$

píšeme též $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Příklad: Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1, \ \ a = 1, b = 3.$

Řešení: $\int_1^3 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^3 = \frac{9}{2} + 3 - (\frac{1}{2} + 1) = 6.$

Příklad: Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = \sqrt[3]{x}, \ \ a = 0, b = 1.$

Řešení: $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\ dx = \left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}.$

http://demonstrations.wolfram.com/IntuitionForTheFundamentalTheoremOfCalculus/

Q#3,4,5

Integrační metody

Per partes v určitém integrálu: Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b \rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx$$

Příklad: $\int_0^1 x \ln(x+1)\ dx = \begin{vmatrix} u' = x & v = \ln(x+1) \\ u = \frac{x^2}{2} & v' = \frac{1}{x+1} \end{vmatrix} = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - 0 = \frac{1}{4}$

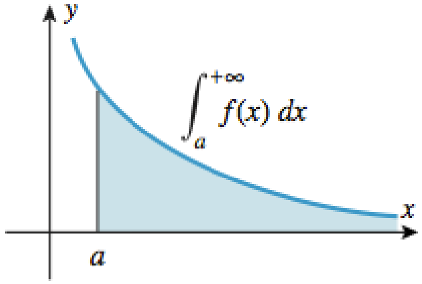
Substituce v určitém integrálu: Jestliže $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na $\langle a, b \rangle$ a je-li $f(u)$ spojitá na $\varphi(\langle a, b \rangle)$, pak platí :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\, du$$

Příklad: $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\ dx = \begin{vmatrix} u = x^2+2x+3, & u(-1) = 2, \\ du = (2x+2)dx, & u(0) = 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{u}\ du = \frac{1}{2}[\ln(u)]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).$

Poznámka: Primitivní funkce k $\frac{x+1}{x^2+2x+3}$ je $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)$. Výsledek integrálu lze tudíž též zapsat jako $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)\right]_{-1}^0$, což je ale ekvivalentní zápisu $\frac{1}{2}[\ln(u)]_2^3$, tedy v určitém integrálu není nutné dělat zpětnou substituci.

Nevlastní integrál



Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice: Definujeme $\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx}$, pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx}$$

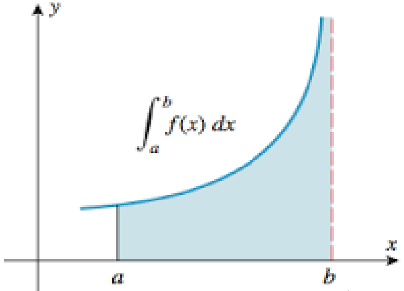
Příklad: $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Definice: Integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ nazveme konvergentním, pokud pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$, $\int_c^\infty f(x)\,dx$, potom definujeme

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx}$$

Příklad: $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx = \begin{vmatrix} 2t = & x-1 \\ 2dt = & dx \end{vmatrix} = \int_{-\infty}^\infty 2\frac{dt}{4t^2+4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\,[arctg\,(t)]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2}\,[arctg\,(t)]_0^\infty = \frac{1}{2}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$

Nevlastní integrál



Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Definice: Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t\rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b)$, pak definujeme

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,dx},$$

pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro funkci neomezenou v bodě a definuje

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)\,dx\,.}$$

Příklad: $\int_0^1 1/\sqrt[5]{x}\;dx = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 x^{\frac{-1}{5}}\,dx = \lim_{t\to 0+} \left[\frac{5x^{\frac{4}{5}}}{4}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0+}\left(\frac{5}{4} - 5\frac{\sqrt[5]{t^4}}{4}\right) = \frac{5}{4} - 0 = \frac{5}{4}.$

Poznámka: Je-li funkce $f(x)$ je neomezená v bodě $c \in (a, b)$, pak definujeme

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,,}$ pokud oba integrály na pravé straně existují.

Příklad: Spočtěte $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\;dx.$

Špatný postup: $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\;dx = [\ln|x-1|]_0^2 = \ln 1 - \ln 1 = 0$

Správně: funkce není definována v bodě 1, tedy $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\;dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\;dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1}\;dx =$ $\lim_{t\to 1+} [\ln|x-1|]_0^t + \lim_{t\to 1-} [\ln|x-1|]_t^2 = \infty - \ln 1 + \ln 1 - \infty$, integrál diverguje.

http://demonstrations.wolfram.com/ImproperIntegrals/

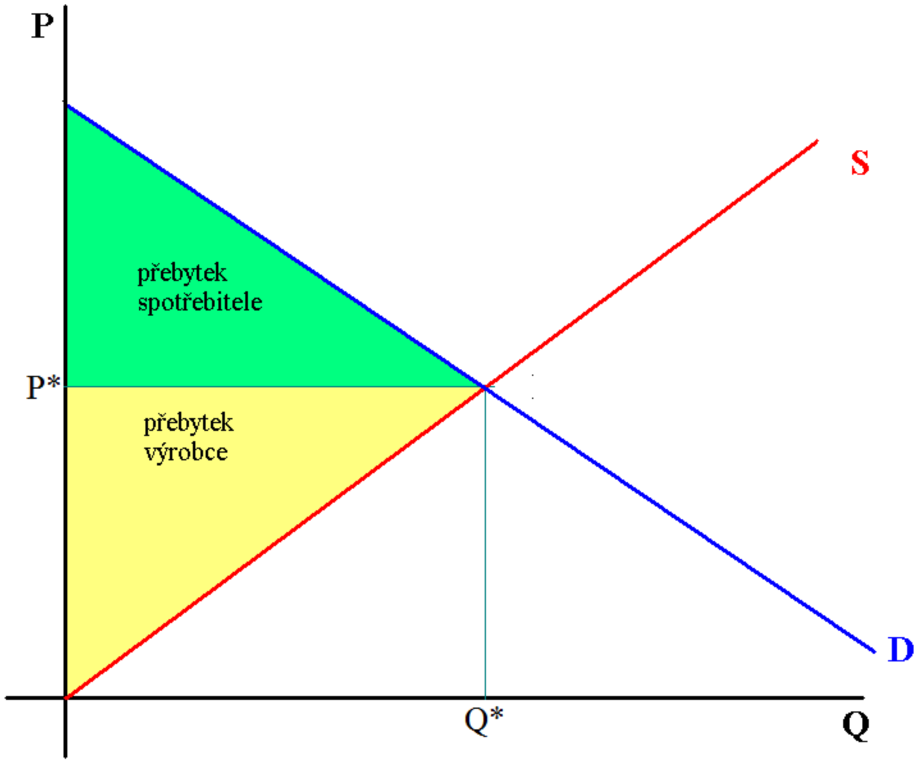
Ekonomické aplikace integrálu

- Akumulace kapitálu
- Distribuce příjmů
- Přebytek výrobce, přebytek spotřebitele pro

$D: P = f(Q), S: P = g(Q)$

$$CS = \int_0^{Q^*} (f(Q) - P^*)dQ$$

$$PS = \int_0^{Q^*} (P^* - g(Q))dQ$$



Q#7,8,9