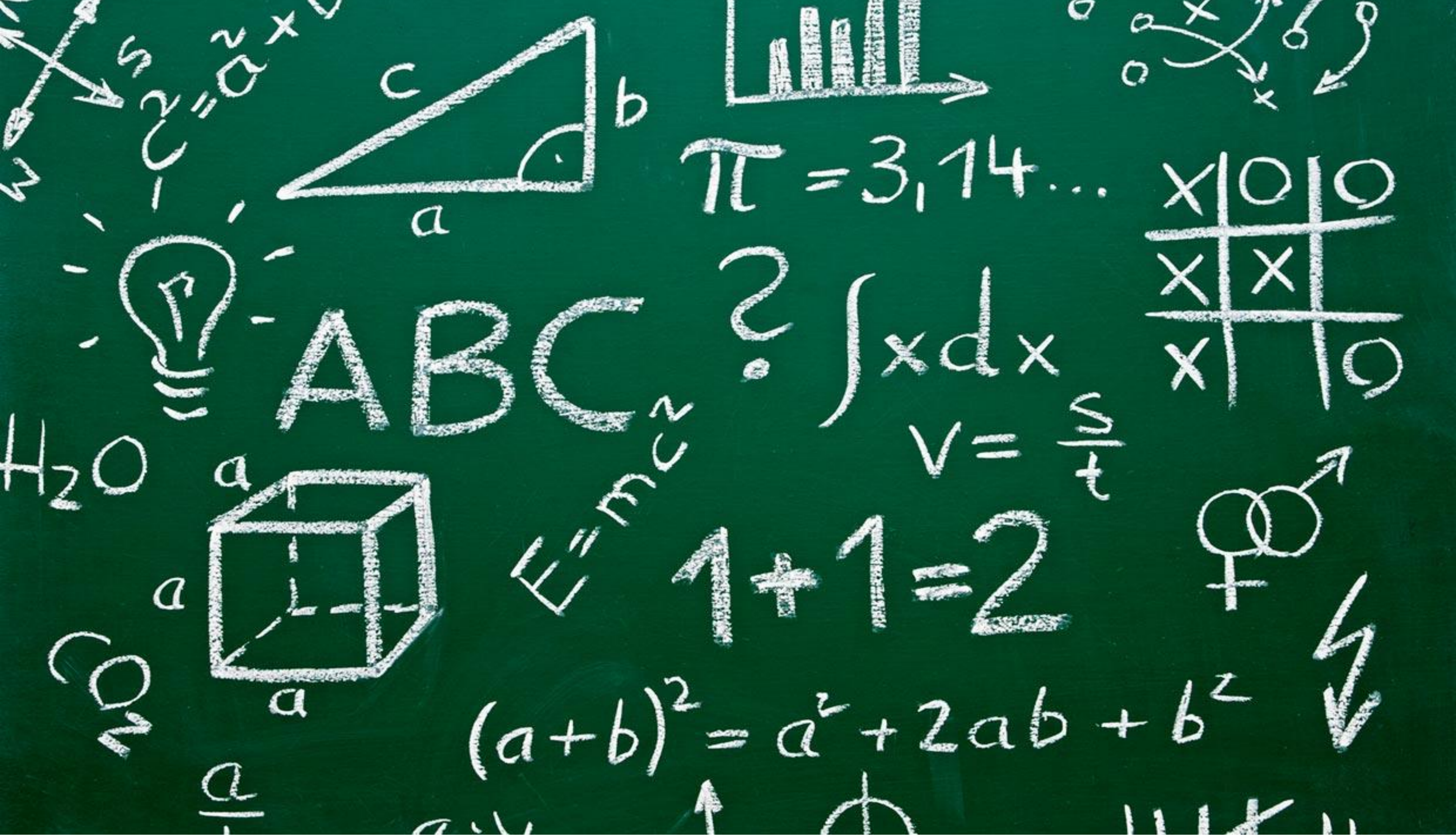


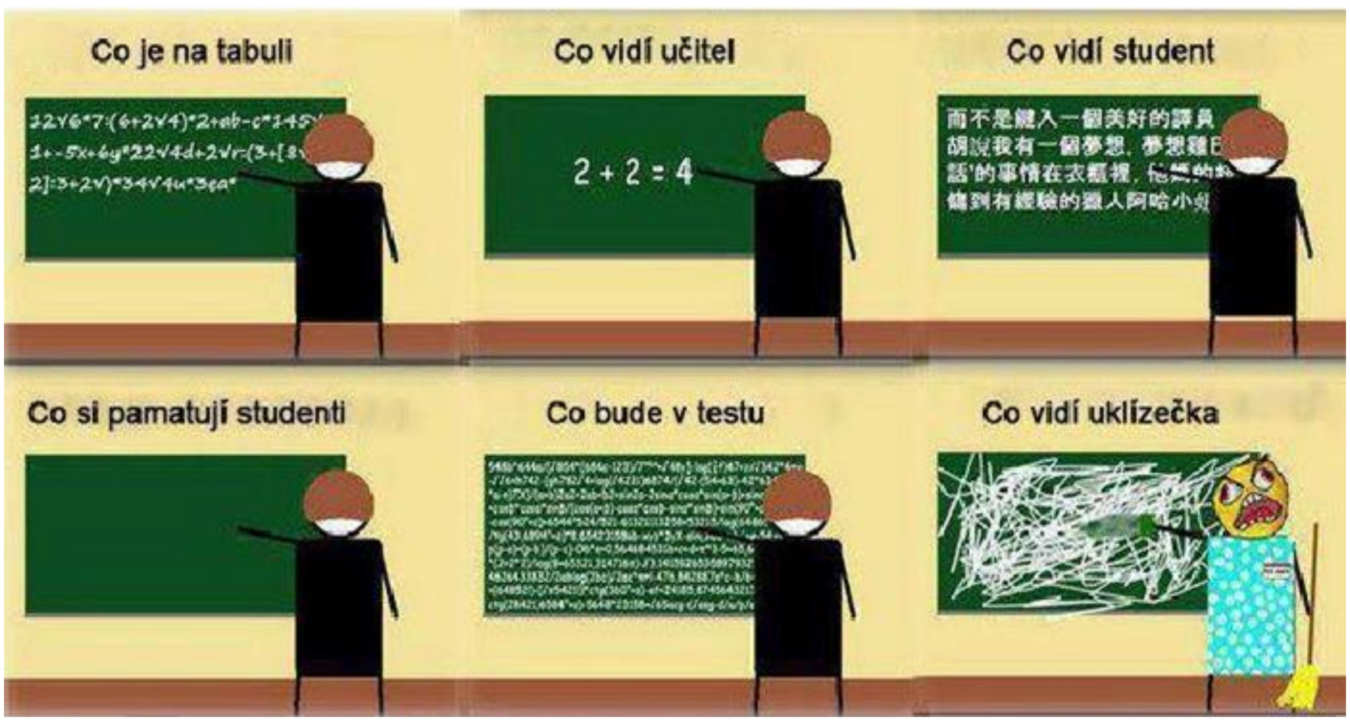
Úvod k předmětu Matematika
jaro 2021

Základní informace

[Interaktivní osnovy]

[Organizační pokyny]

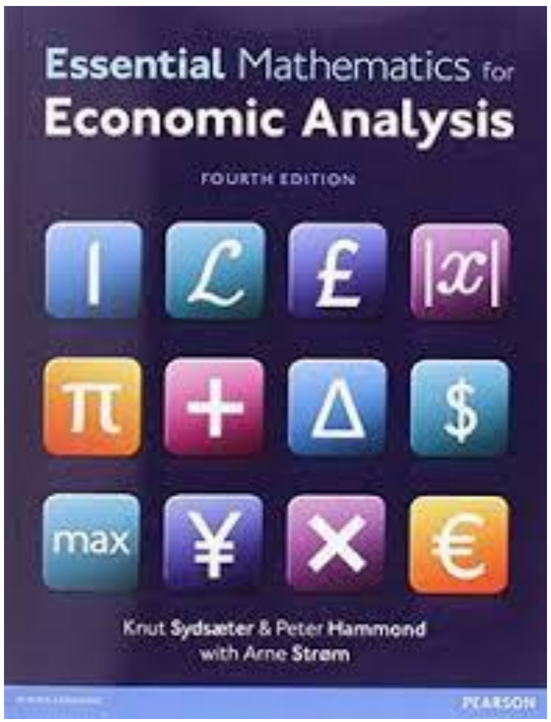
- 5 domácích úkolů
- 5 odpovědníků
- 1 průběžný test
- 2 povolené absence



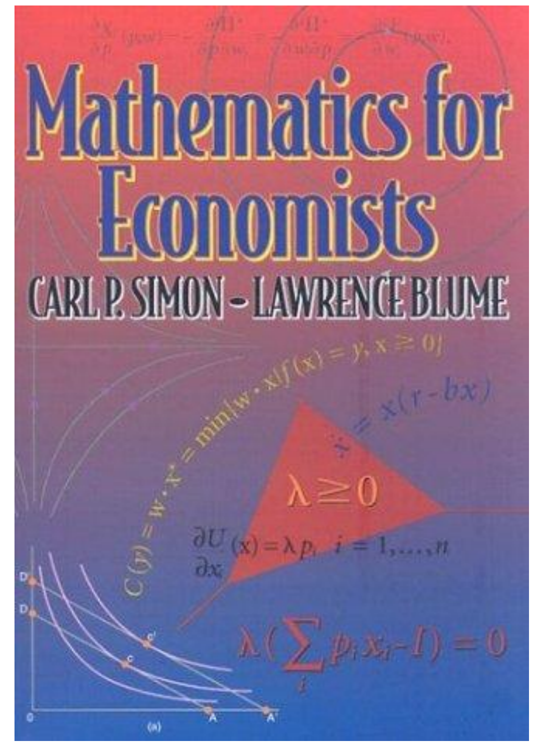
Osnova

- Základní pojmy, posloupnosti a řady
- Funkce
- Limita funkce jedné proměnné
- Derivace
- Použití derivací
- Optimalizace funkce jedné proměnné
- Funkce dvou proměnných
- Neurčitý integrál
- Určitý integrál
- Matice
- Determinant a inverzní matice
- Soustavy lineárních rovnic
- Lineární nezávislost

Literatura

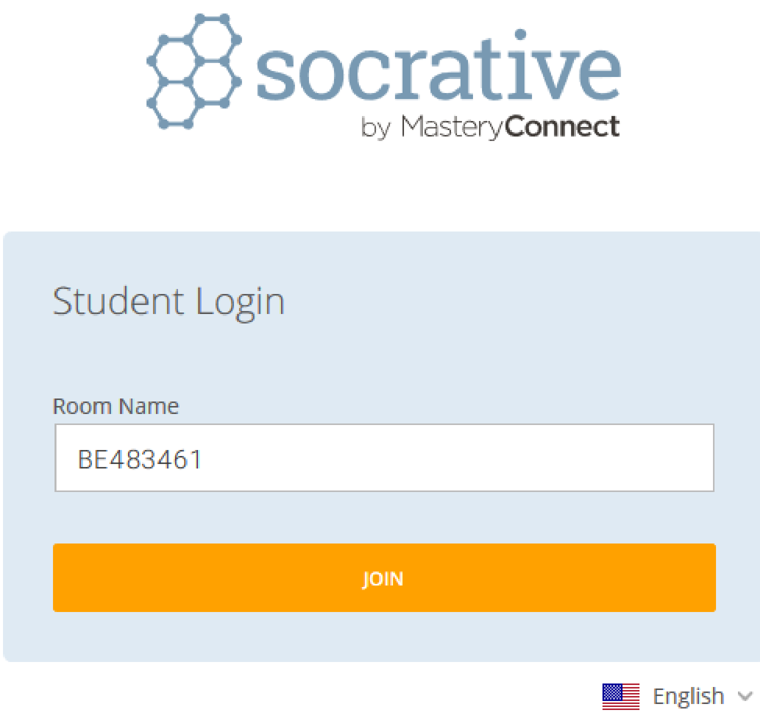

Essential Mathematics for
Economic Analysis
FOURTH EDITION
Knut Sydsæter & Peter Hammond
with Arne Strøm
PEARSON


Matematika
v ekonomii
a ekonomice
GRADA


Mathematics for
Economists
CARL P. SIMON – LAWRENCE BLUME

Online hlasování

- www.socrative.com



Q#1

Už umíte:

- Základní poznatky z logiky a teorie množin
- Základní poznatky z algebry, úprava výrazů
- Základy analytické geometrie v rovině a prostoru
- Elementární funkce a jejich vlastnosti (polynomy, lomenné funkce, mocninné, exponenciální, logaritmické a goniometrické funkce)
- Řešení rovnic a nerovnic (např. algebraické, s absolutní hodnotou, iracionální, exponenciální, logaritmické a goniometrické…)

Číselné množiny

Notace:

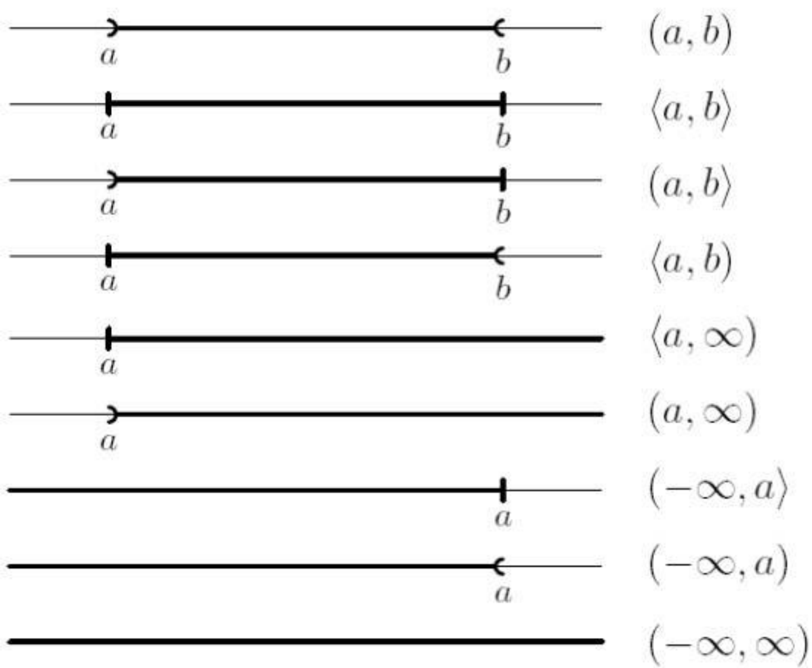
- $\mathbb{N}$ … přirozená čísla $\{1,2,3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ … celá čísla {…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…}
- $\mathbb{Q}$ … racionální čísla $\{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, každé racionální číslo lze zapsat ve formě desetinného rozvoje, který je buď konečný (např. $\frac{3}{4} = 0{,}75$) nebo se v něm periodicky opakuje určitá skupina číslic (např. $\frac{4}{3} = 1{,}3333 \dots = 1,\overline{3}$).
- Symbolem $\mathbb{I}$ označujeme množinu všech iracionálních čísel, tj. čísel, která mají nekonečný neperiodický rozvoj. (např. $\pi = 3{,}141 \dots$). Každé iracionální číslo se dá s určitou předností aproximovat číslem racionálním (např. $\pi \doteq 3{,}14$)

Číselné množiny

- Symbolem $\mathbb{R}$ označujeme množinu všech reálných čísel, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
- $\mathbb{C}$ … komplexní čísla, tj. čísla tvaru $a + b.i$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je tzv. imaginární jednotka splňující $i^2 = -1$
- Podrobnější zavedení číselných oborů: studijní materiály

Interval

- Množinu $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ nazveme uzavřeným intervalem s koncovými body a, b. Podobně definujeme otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ a další viz. obrázek. Intervaly znázorňujeme na číselné ose.



Pojmy konstanta a proměnná

- Konstanta - symbol označující jeden konkrétní prvek nějaké množiny (např. π, e). Časté označení konstanty… c
- Proměnná – symbol označující kterýkoliv prvek nějaké množiny. Časté označení proměnné… x, y, z, i, j, k
- Někdy je při odlišení konstant a proměnných nutné vycházet z kontextu, např. u poptávkové funkce: $Q = a + b \cdot P$

Opakování: výrokové formy

Výrokovou formou nazýváme tvrzení o nějaké proměnné nebo více proměnných $x, y, \ldots$ z daného oboru M, které se stane výrokem dosazením za proměnné nebo kvantifikací

- Notace: $V(x)$, $V(x,y)$, atd.
- Příklad: Výrokovou formou je např. tvrzení $V(x)$ … „x je sudé“, nebo $V(x,y)$ představující tvrzení „$x+y=5$“

Výrok získáme dosazením konstanty, např.: „Pro $x=10$ platí $V(x)$“ nebo kvantifikací, tj. upřesněním počtu konstant z M, pro které platí $V(x)$:

- Obecný kvantifikátor $\forall$ … „pro všechny prvky“:
- $\forall x \in M: V(x)$ čteme „všechna čísla z M jsou sudá“
- Existenční kvantifikátor $\exists$ … „pro aspoň jeden prvek“:
- $\exists x \in M: V(x)$ čteme „V množině M existuje sudé číslo“

Výrokové formy - cvičení

- Příklad: Uvažujme množiny $A, B \subseteq \Omega$, kde Ω je nějaká základní množina. Doplňte zápis pomocí množinových operací:

$\{x \in \Omega, x \in A \vee x \in B\} =$

$\{x \in \Omega, x \in A \wedge x \in B\} =$

$\{x \in \Omega, x \in A \wedge x \notin B\} =$

- Příklad: Rozhodněte o vztahu množin $A, B \subseteq \Omega$, platí-li výrok

$a)\ \forall\, x \in \Omega: x \in A \implies x \in B$

$b)\ \forall\, x \in \Omega: x \notin A \vee x \notin B$

- Pozor, následující výroky jsou různé:

$a)\ \exists\, x \in \Omega: \forall\, y \in \Omega: \mathrm{V(x,y)}$

$b)\ \forall\, y \in \Omega: \exists\, x \in \Omega: \mathrm{V(x,y)}$

Ověřte pravdivost výroků pro $\Omega = \{0,1\}$ a $\mathrm{V(x,y)}$: $\mathrm{x} = y^2$.

Výrokové formy – výsledky cvičení

- Příklad: Uvažujme množiny $A, B \subseteq \Omega$, kde Ω je nějaká základní množina. Doplňte zápis pomocí maticových operací:

$\{x \in \Omega, x \in A \vee x \in B\} = A \cup B$

$\{x \in \Omega, x \in A \wedge x \in B\} = A \cap B$

$\{x \in \Omega, x \in A \wedge x \notin B\} = A \setminus B$

- Příklad: Rozhodněte o vztahu množin $A, B \subseteq \Omega$, platí-li výrok

$a)\ \forall x \in \Omega: x \in A \implies x \in B \ldots A \subseteq B$

$b)\ \forall x \in \Omega: x \notin A \vee x \notin B \ldots A \cap B = \emptyset$

- Pozor, následující výroky jsou různé:

$a)\ \exists x \in \Omega: \forall y \in \Omega: \mathrm{V}(\mathrm{x,y})$

$b)\ \forall y \in \Omega:\ \exists x \in \Omega: \mathrm{V}(\mathrm{x,y})$

Pro $\Omega = \{0,1\}$ a $\mathrm{V}(\mathrm{x,y})\!: \mathrm{x}{=}y^2$ je a) FALSE, b) TRUE

Zobrazení

- Uvažujme neprázdné množiny A, B. Pravidlo F, které každému $x \in A$ přiřadí právě jedno $y \in B$ nazýváme zobrazením A do B.
- Terminologie a označení:

Skutečnost, že prvku

x je přiřazen prvek y zapisujeme jako

$x \longmapsto \mathrm{y}$ nebo $\mathrm{y} = \mathrm{F(x)}$, prvek y nazýváme obrazem x a

x nazýváme vzorem prvku y.

Pro zobrazení $F: A \to B$ nazýváme množinu A definičním oborem zobrazení, píšeme $D_F = A$.

Množinu všech obrazů prvků definičního oboru nazýváme oborem zobrazení, značíme H_F.

- Poznámka: Je-li $H_F = B$, řekneme, že F je zobrazením A na B.

Zobrazení - příklady

V případě konečných množin A, B můžeme zobrazení zadat tabulkou, například pro množiny $A = \{\text{a,b,c,d,e,f}\}, B = \mathbb{N}$

definuje tabulka

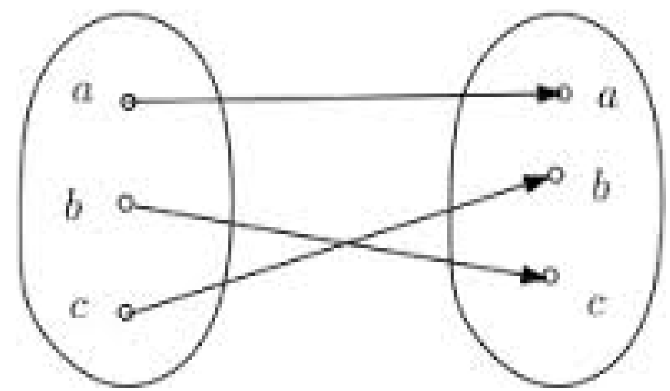
a	b	c	d	e	f
1	2	3	4	5	6

zobrazení $F: A \to B$, kde $F(\mathrm{a}) = 1, F(\mathrm{b}) = 2, F(\mathrm{c}) = 3, F(\mathrm{d}) = 4, F(\mathrm{e}) = 5, F(\mathrm{f}) = 6$.

Také je možné zadat zobrazení graficky:

Obrázek definuje $F: \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$,

kde $F(\mathrm{a}) = \mathrm{a}, F(\mathrm{b}) = \mathrm{c}, F(\mathrm{c}) = \mathrm{b}$



Zobrazení lze definovat taktéž předpisem.

Posloupnost

Definice: Každé zobrazení definované na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ se závisým oborem M nazveme (nekonečnou) posloupností v M. Každé zobrazení definované na množině $\{1,2, \dots, n\}$ nazýváme konečnou posloupností. Jestliže M je množina reálných čísel $\mathbb{R}$, budeme mluvit o číselné posloupnosti.

Posloupnosti značíme většinou jako

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ nebo jako $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Číslo a_n nazýváme n-tý člen posloupnosti.

Speciálním případem jsou aritmetická a geometrická posloupnost.

Aritmetická posloupnost

Definice: Číselnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme aritmetickou, jestliže existuje takové číslo d, zvané diference, že

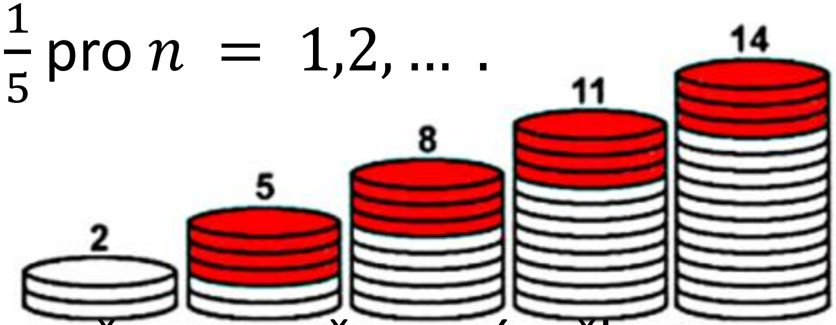
$$a_{n+1} - a_n = d,\ n = 1,2,\dots$$

Příklad: Jako příklad uveďme posloupnost $\left\{\frac{n+3}{5}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Označíme-li $a_n = \frac{n+3}{5}$ pro $n = 1,2,\dots$, dostáváme

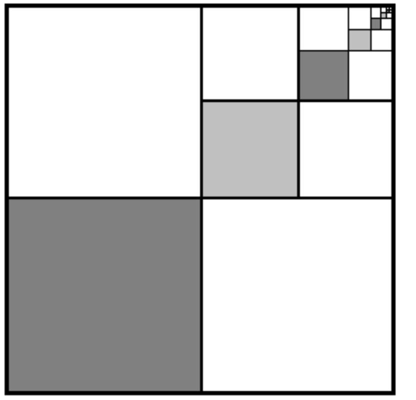
$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+3}{5} - \frac{n+3}{5} = \frac{1}{5} \text{ pro } n = 1,2,\dots .$$

Je tedy posloupnost aritmetická.



Aritmetická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je určena např. prvním členem a_1 a diferencí d. Potom $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d,\ n = 2,3,\dots}$

Geometrická posloupnost



Definice: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme geometrickou posloupností, jestliže existuje číslo q, tak že pro všechna $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$ (stručně řečeno, podíl každých dvou po sobě jdoucích členů je roven q.) Číslo q nazýváme kvocientem geometické posloupnosti. K zadání celé posloupnosti tedy stačí určit jeden člen (například první člen) a kvocient.

Máme pak $\boxed{\forall\, n \in \{1,2,3,\dots\}: a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

Příklad: Posloupnost $\left\{\frac{2^n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty} = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \dots$ je geometrická s kvocientem q $= 2$.

Příklad: složené úročení

Zadání: Na začátku roku je založen účet se vstupním vkladem Z. Úrok ve výši p% se k vkladu připisuje vždy na konci roku a takto vzniklá částka se dále úročí. Označme Z_n částku, na níž se vstupní kapitál Z zúročí za n let. Určete obecný vzorec pro Z_n.

Řešení: Úrok za jeden rok se počítá podle vzorce $u = K \cdot i$, kde $i = \frac{p}{100}$, a K kapitál, z něhož se počítá úrok. Za první rok se vložený kapitál Z zvýší o úrok $Z \cdot i$, tedy na částku

$Z_1 = Z + Z \cdot i = Z(1 + i)$. Tento kapitál vzroste za druhý rok o úrok $Z_1 \cdot i$, tedy na částku $Z_2 = Z_1 + Z_1 \cdot i = Z_1(1 + i)$. Je tedy po druhém roce na účtě kapitál $Z_2 = Z(1 + i)^2$. Tímto způsobem postupujeme dále. Po n-tém roce je na účtě kapitál $Z_n = Z(1 + i)^n$.

Součet prvních m členů posloupnosti

V různých aplikacích se pracuje se součtem prvních m členů posloupnosti $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$. Připomeňme si, že pro geometrickou posloupnost $\{a_1 \cdot q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je

$$\boxed{S_m = a_1 \frac{1 - q^m}{1 - q}}$$

pro $q \neq 1$.

Skutečně, $S_m = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{m-1}$,

úpravou $S_m = a_1(1 + q + \cdots + q^{m-1})$.

Poněvadž $(1 - q) \cdot (1 + q + \cdots + q^{m-1}) = 1 - q^m$, po vydělení $(1 - q)$ dostáváme vzorec.

Pro aritmetickou posloupnost platí $\boxed{S_m = (a_1 + a_m) \cdot \frac{m}{2}}$

Příklad: Předpokládejme, že na začátku každého roku se uloží na konto částka K. Na konci každého roku se stav konta zvýší o úrok. Určeme částku S na kontě po n letech při roční úrokové míře $p\%$.

Řešení: Označme $i = \frac{p}{100}$ a počítejme stav konta po n letech. První vklad se podle příkladu zúročí po n letech na částku

$$S_1 = K(1 + i)^n.$$

Druhý vklad se podle příkladu zúročí po $n - 1$ letech na částku

$$S_2 = K(1 + i)^{n-1}.$$

Tímto způsobem pokračujeme dále, až poslední vklad se podle příkladu zúročí za jeden rok na částku

$$S_n = K(1 + i).$$

Stav konta S po n letech bude tedy roven S $= S_1 + S_2 + \cdots + S_n$.

Dosazením dostáváme

$$S_n = K(1 + i)[1 + (i + 1) + (i + 1)^2 + \cdots (1 + i)^{n-1}].$$

Výraz v hranaté závorce je součet n členů geometrické posloupnosti, tedy

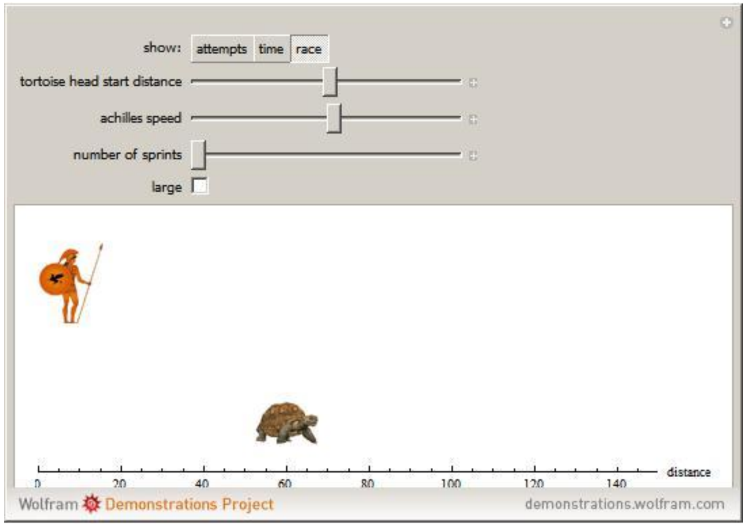
$$S_n = K(1 + i)\frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (i + 1)} = K(1 + i)\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Nekonečné řady, Zenonův paradox

- Limitním přechodem $m \to \infty$ dostaneme z S_m nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Pro geometrickou řadu s kvocientem $|q| < 1$ platí

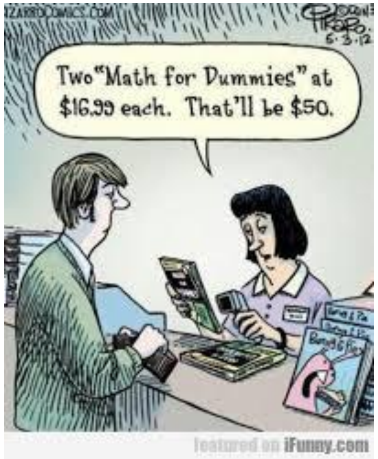
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}}$$

- http://demonstrations.wolfram.com/ZenosParadoxAchillesAndTheTortoise/



Pravidla počítání se sumami

- Pro součet q po sobě jdoucích členů posloupnosti počínaje členem a_p můžeme použít zápis $\sum_{i=p}^{p+q-1} a_i$ nebo třeba $\sum_{i=1}^{q} a_{p+i-1}$, atd.
- Pro konečné sumy platí následující pravidla:



$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Příklad: Zapište pomocí sumy výraz

$$a_i^{\,6} + a_i^{\,5}\, b_j + a_i^{\,4}\, b_j^{\,2} + a_i^{\,3}\, b_j^{\,3} + a_i^{\,2}\, b_j^{\,4} + a_i b_j^{\,5} + b_j^{\,6} \,.$$

Řešení:

$$\sum_{k=0}^{6} a_i^{\,k}\, b_j^{\,6-k}$$

Úlohy se sumami

Cenový index vyjadřuje poměr ceny spotřebního koše v aktuálním roce t ku ceně téhož koše v referenčním roce 0.

Příklad: Spočtěte cenový index pro koš ze tří komodit
v množství $q^{(1)} = 3, q^{(2)} = 5, q^{(3)} = 7$
s cenami $p_0^{(1)} = 1,\ \ p_0^{(2)} = 2,\ \ p_0^{(3)} = 3$ a $p_t^{(1)} = 2, p_t^{(2)} = 3, p_t^{(3)} = 4.$

Řešení: Dostaneme cenový index

$$\left(\sum_{k=1}^{3} p_t^{(k)} q^{(k)}\right) / \left(\sum_{k=1}^{3} p_0^{(k)} q^{(k)}\right) \cdot 100 \ = \frac{2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 7}{1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7} \cdot 100 \doteq 144$$

Příklad: Vypočtěte hodnotu sumy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

Řešení: Sumu zapíšeme jako $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots +$
$+ \left(\frac{1}{n} - \ \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \ \frac{1}{n+1}\right)$

Dvojitá suma

Někdy je třeba sečíst hodnoty tříděné dle více indexů (např. uspořádané do tabulky $m \times n$):

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Celkový součet zapíšeme jako $\boxed{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}}$

Poznámka: pokud jsou meze konečné a nezávislé na druhé čítací proměnné, pak nezáleží na pořadí sumace:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right)$$

Dvojitá suma: příklad

Příklad: V roce 2016 bylo součástí EHP (Evropský hospodářský prostor) 31 zemí. Označme c_{ij} (pro $i, j = 1, \dots, 31$) počet osob, které se v roce 2016 přestěhovaly ze země i do země j. Vyjádřete, kolik osob se v roce 2016 v rámci EHP přestěhovalo celkem.

Řešení: $\sum_{i=1}^{31} \sum_{j=1}^{31} c_{ij}$

Doplňující otázka: co vyjadřuje $\sum_{i=1}^{31} c_{ij}$?