Faktorové modely při tvoře portfolia

May 21, 2021

Při tvorbě portfolia lze využít základní optimalizační techniky. Nejčastější aplikací je Minimum-variance, ale lze využít například i Sharpe ratio (CML). Pro případ zakázaného Sell Shortu pak je možné využít Cut-off portfolio.

Odlišnost je pak ve výpočtu vstupních parametrů k provedení optimalizace, kdy se vychází z faktorových modelů. V praxi se nejčastěji vyskytují studie na aplikaci Fama-French modelů nebo různé modifikace jejich metodologie.

1 Minimum variance (Mean-variance, Tangenciální portfolio)

Výnosnost pro dvou faktorový model:

$$\overline{r}_i = a_i + b_{i1} * \overline{F}_1 + b_{i2} * \overline{F}_2 + e_i$$

Pro více faktorový model pak:

$$\overline{r}_i = a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} * \overline{F}_k + e_i$$

Rozptyl cenného papírů pro dvou faktorový model:

$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2 * \sigma_{F_1}^2 + b_{i2}^2 * \sigma_{F_2}^2 + \sigma_{e_i}^2$$

Jsou-li faktory vzájemně korelovány, pak je nutné upravit rozptyl o vzájemný vliv:

$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2 * \sigma_{F_1}^2 + b_{i2}^2 * \sigma_{F_2}^2 + 2 * b_{i1} * b_{i2} * \sigma_{\overline{F}_1, \overline{F}_2} + \sigma_{e_i}^2$$

Obecně:

$$\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^{K} b_{ik}^2 * \sigma_{F_k}^2 + \sigma_{e_i}^2$$

Kovariance u dvou cenných papírů pro dvou faktorový model:

$$\sigma_{i,j} = b_{i1} * b_{j1} * \sigma^2_{F_1} + b_{i2} * b_{j2}\sigma^2_{F_2}$$

Faktory jsou korelovány:

$$\sigma_{i,j} = b_{i1} * b_{j1} * \sigma^2_{F_1} + b_{i2} * b_{j2} * \sigma^2_{F_2} + (b_{i1} * b_{j2} + b_{i2} * b_{j1}) * \sigma_{\overline{F}_1,\overline{F}_2}$$

Obecně:

$$\sigma_{\overline{r}_i,\overline{r}_j} = cov\left(a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} * \overline{F}_k + e_i; a_j + \sum_{m=1}^{K} b_{jm} * \overline{F}_m + e_j\right) \quad (1)$$

$$\vdots \quad (2)$$

$\sigma_{\overline{r}_i,\overline{r}_j} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{K} b_{ik} * b_{jm} * \sigma_{\overline{F}_k,\overline{F}_m} + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} * \sigma_{e_i,\overline{F}_k} + \sum_{m=1}^{K} b_{jm} * \sigma_{e_j,\overline{F}_m} + \sigma_{e_i,e_j}(3)$

Po získání vah standardní optimalizační technikou je možné vyjádřit s historických výnosností a covariancí E(Rp) a $E(\sigma_p)$ a nebo jsou váhy aplikovány prospektivně a vypočítá se skutečná výnosnost a riziko portfolia.

2 Cut-off portfolio

Faktorové beta, odvození z dvou faktorového modelu:

$$\sigma_{\overline{r}_i,\overline{r}_M} = \sigma_{\overline{F}_1,\overline{r}_M} * b_{i1} + \sigma_{\overline{F}_2,\overline{r}_M} * b_{i2} + \sigma_{e_i,\overline{r}_M} \quad / : \sigma^2_M$$

Přičemž:

$$\beta_{F_1} = \frac{\sigma_{\overline{F}_1,\overline{r}_M}}{\sigma^2_M}, \quad \beta_{F_2} = \frac{\sigma_{\overline{F}_2,\overline{r}_M}}{\sigma^2_M}$$

Pak pro beta:

$$\beta_i = \beta_{F_1} * b_{i_1} + \beta_{F_2} * b_{i_2}$$

Obecně:

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{K} \beta_{F_k} * b_{i_k}$$

, kde

b_{ik} ...citlivost na k-tý faktor, nebo váha faktoru.

Dále ziskáné hodnoty $\sigma^2_{e_i}$ z regresí jsou využity k výpočtu C^* případně C_n u povoleného Shortu.

3 Sloučení CAPM a APT

Jsou-li splněny předpoklady pro platnost modelu CAPM, pak můžeme u dvou faktorového modelu zapsat:

$$\lambda_1 = (\overline{r}_M - r_f) * \beta_{F_1}$$

$$\lambda_2 = (\overline{r}_M - r_f) * \beta_{F_2}(3)$$

Pak pro ATP lze vyjádřit výnosnost aktiva:

$$\overline{r}_i = r_f + \lambda_1 * b_{i_1} + \lambda_2 * b_{i_2}$$