1 Strategické hry

1. seminář

1. Práce na společném projektu. Pracujete s kolegou na společném projektu. Můžete pracovat buď hodně nebo málo. Výsledek projektu závisí na vašem společném úsilí. Výsledek, který nastane, když oba pracujete málo je pro vás lepší než výsledek, kdy vy pracujete hodně a kolega málo, ale horší než výsledek, který nastane, kdy oba pracujete hodně. Nejlepší výsledek je, když vy pracujete málo a kolega hodně. Kolegovi preference jsou stejné. Formulujte strategickou hru, která modeluje tuto situaci.

2. Holubice a jestřáb. Dvě zvířata bojují o kořist. Každé z nich může být pasivní nebo agresivní. Každé z nich preferuje být agresivní, když je soupeř pasivní a být pasivní, když je soupeř agresivní. Při své dané akci zvíře vždy preferuje, když je soupeř pasivní než když je agresivní.

3. Dva lidé vkročí do autobusu, ve kterém jsou dvě volná sousední sedadla. Každá osoba se rozhoduje, zda zůstane stát nebo si sedne. Sedět sám je pohodlnější než sedět vedle někoho, což je pohodlnější než stát.
   - Předpokládejme, že každá osoba se stará jen o své vlastní pohodlí. Formulujte hru a najděte Nashovu rovnováhu.
   - Předpokládejme, že každá osoba se stará o pohodlí druhé osoby. Pokud druhá osoba stojí, pak preferuje ze zdvořilostních důvodů také stát. Formulujte hru a najděte Nashovu rovnováhu.
   - Srovnejte výsledky v obou situacích.

4. Vězňovo dilema s altruistickými preferencemi. Uvažujme situaci podobnou vězňovu dilematu. Čísla v tabulce ovšem nereprezentují preference hráčů, ale peněžní výplaty, které hráči obdrží. Hráči jsou

	D	C
D	1,1	3,0
C	0,3	2,2

Table 1: Vězňovo dilema

altruističtí a preference hráče i mohou být vyjádřeny výplatní funkcí ve tvaru $m_i(a) + \alpha m_j(a)$, kde $m_i(a)$ je peněžní částka, kterou obdrží hráč i při profilu akcí a a α je kladné číslo.
   - Pro případ $\alpha = 1$ formulujte strategickou hru, která modeluje tuto situaci. Je tato hra vězňovým dilematem?
   - Najděte rozsah hodnot α pro něž tato hra není vězňovým dilematem. Najděte pro tyto hodnoty Nashovy rovnováhy.

5. Dělení peněz. Dva lidé se mají mezi sebe rozdělit 10 Kč následujícím způsobem. Každý řekne celé číslo do 10. Pokud je součet jejich čísel maximálně 10, pak každý dostane takovou částku, jaké číslo jmenoval. Pokud je součet jejich čísel větší než 10 a každý řekl jiné číslo, pak osoba, která řekla menší číslo obdrží tuto částku a druhý obdrží zbytek. Pokud je součet jejich čísel větší než 10 a každý řekl stejné číslo, pak každý obdrží 5 Kč. Najděte optimální odpovědi obou hráčů a najděte Nashovu rovnováhu.

6. Varianta hry Lov jelena. Mějme hru lov jelena s n hráči, ve které je potřeba jen m lovců k ulovení jelena, kde $2 \leqq m < n$. Uloveného jelena si rozdělí jen lovci, kteří se na jeho ulovení podíleli. Najděte Nashovy rovnováhy pro dané dva případy preferencí.
   - Každý lovec preferuje $\frac{1}{n}$ jelena před zajícem
   - Každý lovec preferuje $\frac{1}{k}$ jelena před zajícem, kde $m \leqq k \leqq n$. Ale preferuje zajíce, před jakoukoliv menší částí jelena.

7. Voličská účast. Dva kandidáti A a B kandidují ve volbách. Z n voličů jich k podporuje kandidáta A a $m = n - k$ podporuje kandidáta B. Hlasování je pro voliče nákladné, náklady jsou ve výši $-c$, kde $0 < c < 1$. Pokud vyhraje preferovaný kandidát obdrží volič výplatu 2, pokud skončí volby remízou obdrží výplatu 1. Najděte Nashovy rovnováhy pro případ, kdy $k = m$ a pro případ kdy $k < m$.

8. Jaké jsou Nashovy rovnováhy hry zadané následující tabulkou? Která rovnováha odpovídá stálému stavu, pokud hra modeluje dvoustranné interakce v populaci složené z totožných jedinců?

	A	B	C
A	1,1	2,1	4,1
B	1,2	5,5	3,6
C	1,4	6,3	0,0

Table 2:

2. seminář

1. Synergie. Dva jedinci spolupracují na projektu a rozhodují se o tom kolik úsilí investovat do společného projektu. Úsilí osoby i reprezentujeme pomocí kladného čísla a_i. Výsledek projektu a zároveň i preference jsou reprezentovány výplatní funkcí $u_i(a_i) = a_i(c+a_j-a_i)$. Najděte Nashovu rovnováhu této hry.

2. Přispívání na veřejný statek s rozhodováním kolik přispět. Označme w bohatství osoby i a c_i příspěvek na veřejný statek. Zbytek $w - c_i$ je vydán za soukromou spotřebu. Množství poskytnutých veřejných statků je rovno množství poskytnutých příspěvků. Předpokládejme, že hráči jsou 2 a jejich výplatní funkce mají tvar $u_1(c_1) = \sqrt{c_1 + c_2} + w_1 - c_1$ a $u_2(c_2) = 2\sqrt{c_1 + c_2} + w_2 - c_2$ (Všimněte si, že hráči si cení veřejných i soukromých statků, přičemž platí, že víc statků mají tím vyšší výplata a mezní užitek z veřejných statků klesá). Nalezněte optimální odpovědi hráčů a Nashovu rovnováhu.

3. Přispívání na veřejný statek, kdy spotřeba veřejného statku ovlivňuje užitek ze spotřeby soukromého statku. Předpokládejme, že hru hrají 2 hráči výplatní funkce vypadá následovně $c_1 + c_2 + (w_i - c_i) + (c_1 + c_2)(w_i - c_i)$ (poslední člen ukazuje, že čím více veřejného statku je poskytnuto, tím více si lidé užijí soukromé spotřeby). Předpokládejme, že $w_1 = w_2 = w$. Najděte Nashovu rovnováhu této hry. Ukažte, že v Nashově rovnováze jsou na tom hráči hůře oproti situaci, kdy oba přispějí polovinu. Jak vypadá Nashova rovnováha v případě, že hru hraje n hráčů?

4. Cournotova hra a technologický pokrok. Co se stane s Nashovou rovnováhou a výstupem firem v Cournotově oligopolu se dvěma firmami, lineární inverzní poptávkou a konstantními průměrnými náklady, pokud jedna z firem zažije technologický pokrok, který sníží její náklady.

5. Cournotův oligopol s fixními náklady. Najděte Nashovu rovnováhu v Cournotově oligopolu se dvěma firmami v případě, kdy inverzní poptávková funkce je $P(Q) = \alpha - Q$ a nákladová funkce firmy i má tvar
$$C_i(q_i) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } q_i = 0 \\ f + cq_i & \text{pokud } q_i > 0 \end{cases}$$
kde $c > 0$, $f > 0$ a $c < \alpha$. Jak ovlivňují fixní náklady rozhodování firmy?

6. Na trhu jsou 2 firmy A a B, které si konkurují bertrandovským způsobem. Firmy neprodávají zcela totožný produkt. Poptávka po produktech firmy A je dána rovnicí $q_a = 24 - 2p_a + p_b$. Poptávka po produktech firmy B je $q_b = 24 - 2p_b + p_a$. Obě firmy mají konstantní mezní náklady ve výši 3. Odvoďte a nakreslete optimální odpovědi obou firem. Najděte Nashovu rovnováhu.

7. Užívání společného zdroje. N subjektů využívá společný zdroj k produkci. Když se zvyšuje množství zdrojů využívané všemi subjekty, každý subjekt může vyrábět menší množství. Označme x_i množství zdrojů využívané subjektem i. Předpokládejme, že výstup je dán rovnicí $x_i(1 - (x_1 + ... + x_n))$ pokud $x_1 + ... + x_n \leqq 1$, v opačném případě je výstup 0. Každý subjekt si volí x_i tak, aby maximalizoval svůj výstup. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte Nashovu rovnováhu. Nacházíte nějakou podobnost mezi touto hrou a Cournotovým oligopolem? Najděte profil akcí $(x_1, ..., x_n)$ při němž je výstup každé firmy větší než v Nashově rovnováze.

3. seminář

1. Americké prezidentské volby. Uvažujme následující variantu Hotellingova modelu. Voliči jsou rozděleny mezi 2 státy. Stát 1 disponuje větším počtem zastupitelů než stát 2. Vítězem se stane kandidát, který obdrží většinu zastupitelských hlasů. Označme m_i pozici mediánového voliče státu i, přičemž $m_2 < m_1$. Každý ze dvou kandidátu si vybírá jedinou pozici pro oba státy. Kandidát, který získá většinu hlasů v daném státě, obdrží hlasy všech zastupitelů. Pokud kandidáti získají stejný počet voličských hlasů, pak se hlasy zastupitelů rozdělí na půl. Najděte Nashovy rovnováhy hry, která modeluje tuto situaci.

2. Volební soutěž mezi ideologickými kandidáty. Uvažujme následující variantu Hotellingova modelu. Jsou dva kandidáti, kteří se nezajímají o to, zda vyhrají, ale mají rovněž svou preferovanou pozici. Ostatní pozice jsou pro něj tím horší, čím dále jsou od preferované pozice. Předpokládejme, že preferovaná pozice jednoho kandidáta je nalevo od mediánu a preferovaná pozice druhého kandidáta je napravo od mediánu. Dále předpokládejme, že pokud oba kandidáti dostanou stejně hlasů, pak se dohodnou na zavedení kompromisní politiky $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, kde x_1 a x_2 jsou pozice kandidátů. Najděte Nashovu rovnováhu.

3. Válka do vyčerpání. Dva hráči bojují o objekt, kterého si cení na v a 50% šanci na získání objektu si cení na $\frac{v}{2}$. Hráči se rozhodují o tom, kolik času stráví bojem. Čas, který stráví v boji, je pro ně nákladný. Tzn., že výplata hráče, který bojoval po dobu t_i a získal objekt je $v_i - t_j$ (nemusí bojovat po čase t_j kdy druhý hráč boj vzdal). V případě nezískání objektu je jeho výplata $-t_i$. Pokud oba dva hráči vzdají boj ve stejný okamžik, pak každý získá objekt s pravděpodobností 50 %. Čas chápeme jako spojitou proměnou. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a nalezněte Nashovy rovnováhy.

4. Odpovědnost za škodu. Škůdce může vynaložit náklady a_1 k odvrácení škody. Poškozený může vynaložit náklady a_2 k odvrácení škody. Očekávaná výše škody je dána funkcí $\frac{1000}{(a_1+1)(a_2+1)}$.
   - Jaká je společensky optimální úroveň nákladů vynaložených k odvrácení škody?
   - Uvažujme zákon, který stanoví, že škůdce nemusí platit žádnou škodu, pokud vynaloží náklady alespoň ve výši 9 a naopak musí zaplatit celou škodu, pokud vynaložil náklady menší než 9. Jak vypadá rovnováha této hry? Je tato rovnováha společensky optimální?
   - Uvažujme tzv. objektivní odpovědnost za škodu. Tzn. škůdce je vždy zodpovědný za škodu bez ohledu na vynaložené náklady. Jak vypadá rovnováha této hry?

5. Experiment - Minimální snaha

4. seminář

1. Holubice a jestřáb. Dva hráči bojují o kořist. Každý hráč může být pasivní (P) nebo agresivní (A). Preference hráčů nad deterministickými výsledky jsou následující: každý preferuje být agresivní, pokud je soupeř pasivní; každý preferuje být pasivní, pokud je soupeř agresivní; při své strategii je pro hráče lepší, pokud je oponent pasivní než agresivní. Uvažujme hráče s vNM preferencemi, které splňují následující podmínky (i) každý hráč je indiferentní mezi výsledkem (P,P) a loterií, která připisuje pravděpodobnost $\frac{1}{2}$ profilu (A,A) a pravděpodobnost $\frac{1}{2}$ loterii v níž je daný hráč A a protivník P; (ii) každý hráč je indiferentní mezi výsledkem v níž je daný hráč P a protivník A a loterií která připisuje pravděpodobnost $\frac{2}{3}$ profilu (A,A) a pravděpodobnost $\frac{1}{3}$ profilu (P,P). Najděte výplatní funkci, která reprezentuje tyto preference. Najděte Nashovu rovnováhu této hry.

2. Obrana území. Generál A brání území před armádou B. Generál A má k dispozici 3 jednotky, generál B 2 jednotky. Území je chráněno horami a bitvy se mohou odehrávat jen ve dvou údolích. Generál A vyhraje bitvu v každém údolí, pokud tam pošle alespoň tolik jednotek jako generál B; území ubrání jen, pokud vyhraje bitvy v obou údolích. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte Nashovu rovnováhu.

3. Křižovatka. Jedinci z jedné populace řidičů se náhodně po dvou potkávají na křižovatce. Každý řidič na ní může buď zastavit nebo jet dál. Preference řidičů jsou dány následující tabulkou, kde $\epsilon \in (0, 1)$. Najděte symetrickou rovnováhu této hry.
   Nyní předpokládejte, že řidiči se cítí vinni, když jedou dál a jejich výplata tím pádem klesne o $\delta > 0$.

	Stop	Jet dál
Stop	$1, 1$	$1-\epsilon, 2$
Jet dál	$2, 1-\epsilon$	$0, 0$

Table 3: Křižovatka

Ukažte, že řidiči jsou na tom v symetrické rovnováze této hry lépe než v rovnováze původní hry.

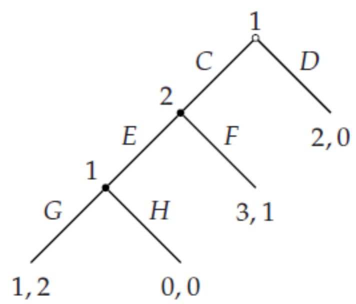
4. Očkování. Každý člověk z populace se rozhoduje, zda se nechat očkovat. Pokud se nenechá očkovat, pak s pravděpodobností π může onemocnět a jeho výplata je pak $-r_i$. Očkování má nežádoucí účinky. Pokud se nechá očkovat je jeho očekávaná výplata $-r_v$, kde $r_v < r_i$. Pravděpodobnost nakažení π závisí na, tom jaká část populace je očkovaná p tímto vztahem $\pi(p) = 1 - \frac{1}{R(1-p)}$, kde R je základní reprodukční číslo (pokud je $p > 1 - 1/R$ pak je dosaženo "stádové imunity" a pravděpodobnost nakažení je 0). Najděte Nashovu rovnováhu. Je Nashova rovnováha efektivní?

5. Experiment - Volba cesty

2 Extenzivní hry

5. seminář

1. Najděte Nashovu rovnováhu následující hry. Dejte pozor, že vypíšete všechny strategie.



2. Definujme následující hru: hráči 1 a 2; konečné historie (C,E) (C,F) (D,G) a (D,H); hráčská funkce $P(\varnothing) = 1$ a $P(C) = P(D) = 1$; preference hráče 1 $(C, F) \succ (D, G) \succ (C, E) \succ (D, H)$; preference hráče 2 $(D, G) \succ (C, F) \succ (D, H) \succ (C, E)$. Zapište tuto hru v diagramu. Najděte Nashovu rovnováhu a SPE.

3. Volení pomocí veta. Dva lidé si volí z několika společných možností následujícím způsobem: střídají se ve vyřazování jednotlivých možností dokud nezůstane jen jedna. Předpokládejme, že existují tři možnosti X,Y a Z. Preference prvního člověka jsou $X \succ Y \succ Z$, preference druhého člověka jsou $Z \succ Y \succ X$. Modelujte tuto situaci jako hru. Najděte Nashovu rovnováhu a SPE.

4. Spálení mostu. Armáda země 1 se rozhoduje, jestli zaútočí na armádu země 2, která obsadila ostrov mezi zeměmi 1 a 2. V případě útoku se armáda 2 může bránit nebo přes most opustit ostrov. Každá země preferuje obsazení ostrova před jeho neobsazením. Boj je pro obě armády nejhorší možností. Modelujte tuto situaci jako extenzivní hru. Co se stane, pokud armáda 2 spálí ostrov?

5. Doktor divnoláska. SSSR a USA mají jaderné zbraně. USA se rozhodují, zda zaútočí konvenčními zbraněmi na SSSR. Pokud to udělají, pak SSSR může odpovědět konvenčním protiútokem, nebo jaderným protiútokem. Pokud se SSSR rozhodne pro jaderný protiútok, pak USA může také zareagovat jaderným protiútokem. V případě jaderného útoku je země zničena. Preference obou zemí jsou stejné. Obě země preferují výsledky, kdy nejsou zničeny před výsledky, kdy jsou zničeny. Pokud už jsou zničeny, pak preferují výsledek, kdy je zničena i druhá země. USA mají vojenskou převahu a proto preferují útok konvenčními zbraněmi před neútočením. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte SPE. Co se stane, pokud SSSR sestaví stroj, který vypustí na USA v případě jejich útoku

jaderné zbraně a který není možné zastavit.

6. Holdup game. Hra je podobná ultimátní hře s tím rozdílem, že na začátku hry se hráč 1 rozhoduje o investici. Může investovat buď hodně nebo málo (H nebo L). Čím víc hráč 1 investuje, tím větší je částka (c_H,c_L), kterou hráč 2 poté rozděluje (nabídne x). Hráč 1 může nabídku hráče 1 zamítnout nebo přijmout. Pokud nabídku odmítne, pak oba hráči obdrží výplatu 0. Pokud nabídku přijme, pak hráč 1 získá $x - H$ nebo $x - L$ a hráč 2 získá $c_H - x$ nebo $c_L - x$. Formulujte hru, která modelujte tuto situaci a najděte Nashovy rovnováhy a SPE.

7. Rozmazlené dítě (Na podobné hře založil Becker(1981) svůj model rozhodování v rodině). Akce dítěte a ovlivňuje jeho osobní příjem $c(a)$ i příjem rodičů $p(a)$. Vždy platí $c(a) < p(a)$. Dítě je sobecké, stará se jen o $c(a)$. Rodičům naopak záleží jak na vlastním příjmu, tak na příjmu dítěte. Jejich výplatní funkce je $min\{p(a), \alpha c(a)\}$, kde α ukazuje nakolik jim záleží na příjmu dítěte. Pokud $\alpha = 1$, pak jim na příjmu dítěte záleží stejně jako na vlastním. Rodiče mohou, poté co si dítě volí akci a, transferovat část příjmu k dítěti. (Jejich výplatní funkce při transferu t je $min\{p(a) - t, \alpha(c(a) + t)\}$) Formulujte hru, která modeluje tuto situaci pro $\alpha = 1$ a ukažte, že v SPE dítě maximalizuje společný příjem sebe a rodičů. Jak se změní SPE, pokud $\alpha > 1$?

8. Dolarová aukce. Aukce se účastní dva lidé a oba si draženého objektu cení na v. Každý z hráčů na konci musí zaplatit svou nabídku. Vítěz tedy získá $v - b_i$, poražený $-b_i$. Aukce probíhá tak, že hráč buď končí nebo nabídne o 1 Kč více než protivník. Každý z hráčů má bohatství $w > v$. Více než w nemůže hráč nabídnout. Modelujte aukci jako extenzivní hru a najděte SPE. (Zkuste nejprve nějaká konkrétní čísla, např. $v = 3$ a $w = 4$) Jaké výsledky aukce byste očekávali v realitě?

6. seminář

1. Ultimátní hra s hráči preferujícími rovnost. Uvažujme variantu ultimátní hry, ve které se hráči starají nejen o své vlastní příjmy, ale i rovnost distribuce příjmů. Předpokládejme, že preference hráčů jsou dány výplatní funkcí $u_i(x_1, x_2) = x_i - \beta_i|x_1 - x_2|$, kde $\beta_i > 0$. Hráči si dělí částku 1. Najděte SPE a srovnejte je. Existují nějaké hodnoty β_1 a β_2 pro něž je nabídka v rovnováze zamítnuta?

2. Agenda. Při různém schvalování může určitý orgán návrh pouze přijmout nebo odmítnout, nemůže jej měnit. Předpokládejme, že máme komisi, která předkládá návrh a výbor, který ho schvaluje. Komise i výbor mají různé preference, které můžeme reprezentovat stejně jako preference voličů v Hotellingově modelu. Konkrétně označme preference výboru jako 0 a preference komise $y_k > 0$. Komise předkládá návrh y. Pokud ho výbor neschválí, pak je zůstává platný dosavadní stav y_0. Najděte SPE. Jak závisí na y_0?

3. Šikanující žaloba (Nuisance suits). Šikanující žaloba je žaloba, která má mizivou naději na úspěch a jejím účelem je dospět k finančnímu vyrovnání s protistranou. Představme si následující hru. Žalobce se rozhoduje, zda vznese nárok nebo ne. Pokud ho nevznese, pak oba hráči končí s výplatou 0. Pokud ho vznese, pak nese náklady c a navrhne obviněnému možnost odškodnění s. Pokud obviněný návrh přijme, pak je žalobce odškodněn a obdrží $s - c$, obviněný má $-c$. Pokud návrh odmítne, pak se žalobce rozhoduje, zda půjde k soudu. U soudu má šanci na vítězství pX, kde X je částka, kterou vysoudí a $p \to 0$ je pravděpodobnost, že vyhraje. Žalující strana nese u soudu další náklady ve výši d. Obviněný nese náklady e.
   - Najděte SPE této hry. Jak je SPE ovlivněno velikostí nákladů e?
   - Co se stane, pokud žalující strana zaplatí soudní náklady d už při podání návrhu na odškodnění? Má smysl vytvořit si takovým způsobem utopené náklady?
   - Může stejně reagovat obviněný? Jaké má jeho reakce společenské náklady?

4. Vyjednávání mezi firmou a odbory. Vedení firmy vyjednává s odbory o platech. Vedení ví o kolik budou příjmy vyšší než kapitálové výdaje. O tento přebytek vyjednává vedení firmy s odbory. Přebytek bude mít velikost H s pravděpodobností p a L s pravděpodobností $1 - p$, $H > L$. Vyjednávání má podobu ultimátní hry, kde odbory učiní nabídku a vedení ji přijme nebo zamítne. Pokud odbory požadují x, velikost přebytku je z a vedení nabídku přijme, pak výplata vedení je $z - x$ a výplata odborů je x. Pokud vedení nabídku odmítne, pak odbory zahájí stávku a všichni získají 0. Najděte SPE. Najděte

pravděpodobnost, že odbory zahájí stávku.

5. Stackleberg s fixními náklady. Najděte SPE v Stacklebergově oligopolu se dvěma firmami v případě, kdy inverzní poptávková funkce je $P(Q) = \alpha - Q$ a nákladová funkce firmy i má tvar

$$C_i(q_i) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } q_i = 0 \\ f + cq_i & \text{pokud } q_i > 0 \end{cases}$$

kde $c > 0$, $f > 0$ a $c < \alpha$. Ukažte, že v případě $c = 0$, $\alpha = 12$ a $f = 4$ má hra jedinou SPE.

6. Vstupní hra s finančními omezeními. Na trhu působí jedna firma (monopolista) a další firma se rozhoduje o vstupu na trh (vyzyvatel). Pokud vyzyvatel nevstoupí, pak monopolista získá po T zbývajících period výplatu M a vyzyvatel 0. Pokud vyzyvatel vstoupí, pak zaplatí náklady vstupu f. V každé z T dalších period se monopolista rozhoduje, zda bude s vyzyvatelem bojovat nebo se s jeho vstupem smíří. V prvním případě obdrží oba výplatu $-F < 0$, ve druhém případě obdrží oba $C > max\{F, f\}$. Pokud ve kterémkoliv dalším období vyzyvatel odejde z trhu, pak v daném období obdrží obě firmy výplatu 0. V dalších obdobích dostane vyzyvatel výplatu 0 (nemůže znovu vstoupit) a monopolista získá $M > 2C$. Najděte SPE hry modelující tuto situaci. Jak se situace změní, pokud má vyzyvatel omezené finanční zdroje a může přežít jen $T - 2$ období boje (v období T-1 by musel odejít z trhu)?

7. seminář

1. Principál-agent. Agent má užitkovou funkci $U = \sqrt{w} - e$, kde e může nabývat hodnot 0 nebo 7. V případě odmítnutí kontraktu získá agent užitek $\overline{U} = 4$. Jen agent pozoruje hodnotu svého úsilí, ale mzda může být podmíněna úrovní výstupu. Označme $\overline{w}$ mzdu při výstupu 1000 a $\underline{w}$ mzdu při výstupu 0. Závislost výstupu na úsilí je dána tabulkou.

	pravděpodobnost výstupu 0	pravděpodobnost výstupu 1000
e=0	0,9	0,1
e=7	0,2	0,8

- Jak vypadají všechna motivační omezení a omezení účasti pro situaci, kdy agent vyvine velkou snahu.
- Jak vypadá optimální kontrakt? Jaký je agentův užitek? Jaké jsou náklady principála?
- Jaký by byl agentův užitek při plných informacích? Jaké jsou náklady principála?

2. Experiment - aukce

3 Hry s nedokonalými informacemi

8. seminář

1. Bitva pohlaví. Mějme hru bitva pohlaví, ve které se hráči vždy chtějí setkat. Neví ale zda má druhý hráč raději Bacha nebo Stravinského. První hráč přikládá každému ze stavů pravděpodobnost $\frac{1}{2}$. Druhý hráč přikládá stavu, kdy má první hráč raději Bacha, pravděpodobnost $\frac{1}{3}$.

2. Převzetí. Firma A chce převzít firmu T. Nezná však její přesnou hodnotu, ví však, že se pohybuje mezi 0 a 100. Každé z těchto 101 hodnot může nabývat se stejnou pravděpodobností. Díky synergickému efektu zvýší firma T po převzetí svou hodnotu o 50%. Předpokládejte, že hodnota firmy je x a firma A dá nabídku y. Pokud vlastníci firmy T souhlasí s nabídkou, pak výplaty jsou $\frac{3}{2}x - y$ a y. Pokud odmítnou, pak jsou výplaty rovny 0. Modelujte situaci jako hru ve které se firma A rozhoduje o nabídce a vlastníci firmy T o nejnižší nabídce, kterou přijmou. Najděte Nashovu rovnováhu.

3. Předpokládejme, že dvě firmy si konkurují Cournotovským způsobem. Náklady firem jsou $C_1 = cq_1$, $C_2 = c_h q_2$, $C_2 = c_l q_2$, kde $c_h > c_l$. Firma 1 nezná náklady firmy 2, pravděpodobnost nákladů c_h je p. Poptávka má tvar $D(Q) = \alpha - Q$. Najděte Nashovu rovnováhu této hry a srovnejte ji s rovnováhou

Cournotova duopolu s dokonalými informacemi.

4. Uvažujme first-price aukci, které se účastní dva hráči a Bernoulliho užitkovou funkcí $x^{1/2}$, kde x je jeho monetární výplata. Ocenění hráčů má rovnoměrné rozdělení na intervalu [0,1]. Ukažte, že v rovnováze oba hráči nabízejí $b_i = \frac{2}{3}v_i$. Srovnejte výnos z této aukce s výnosem z připadné second-price aukce.

5. Uvažujme first-price aukci se společným oceněním, které se účastní 2 hráči. Signály hráčů jsou rozděleny rovnoměrně na intervalu [0,1]. Hodnota objektu je $\alpha t_1 + \beta t_2$. Ukažte, že v Nashově rovnováze oba hráči nabízejí $b_i = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)t_i$.

9. seminář

1. Uvažujme následující hru o dvou hráčích. Na začátku dá každý hráč do banku 1 Kč. Pak si vytáhne kartu, která může být buď vysoká nebo nízká. Poté se hráč na kartu podívá. Následně může hráč 1 zvýšit nebo skončit. Pokud skončí, pak hráči porovnají své karty, ten který má vyšší kartu vyhrává. Pokud mají stejné karty, pak si každý bere svou 1 Kč zpět. Pokud zvýší, pak přidá do banku k Kč a hráč 2 může složit nebo srovnat. Pokud srovná, pak dá do banku k Kč a hráči porovnají své karty. Pokud složí, pak hráč 1 získá bank. Modelujte situaci jako extenzivní hru.

2. Najděte Nashovu rovnováhu předchozí hry pro $0 < k < 1$ a pro $k > 1$. Jak souvisí ochota hráče 1 blufovat s k?

3. Seltenův kůň. Najděte slabé sekvenční rovnováhy hry Seltenův kůň.

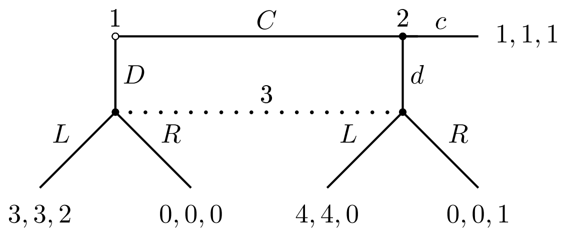


Figure 1: *Seltenův kůň*

4. Hra Sira Philipa Sydneyho. Hladový rodič má jeden kus jídla, který může dát svému potomku nebo si jej nechat. Rodič je silnější a zajišťuje si vyšší šanci k reprodukci, pokud si nechá jídlo, normalizujme jeho sílu v tomto případě na 1. Pokud dá jídlo potomku, pak je jeho síla $S < 1$. Potomek může být hladový nebo ne. Pokud potomek nekřičí, pak je jeho síla 1, pokud dostane jídlo; V, pokud není hladový a nedostane jídlo a 0, pokud je hladový a nedostane jídlo. Pokud potomek křičí, pak je jeho síla násobená koeficientem $1-t$, kde $t \in [0, 1]$. Označme stupeň spřízněnosti potomka s rodičem r. Výplata každého hráče je dána součtem jeho síly a r násobkem síly spřízněného hráče. Najděte podmínky pro r, S, V a t, pro které má hra separovanou WSE.

5. Odbory proti vládě. Předpokládejme, že odbory se ve dvou po sobě jdoucích obdobích rozhodují, zda budou stávkovat. V případě stávky se vláda rozhoduje, zda odborům ustoupí. Pokud vláda ustoupí, získají odbory výplatu 1. Pokud vláda ustoupí, získají odbory výplatu -1. Pokud odbory nezahájí stávku, pak získají výplatu 0. Vláda může být tvou typů: tvrdá nebo měkká. Měkká vláda získá výplatu 0 když stávka nezačne; -2 když ustoupí; -3 když neustoupí. Tvrdá vláda získá výplatu 0 když stávka nezačne; -3 když ustoupí; -2 když neustoupí. Označme p_0 apriorní pravděpodobnost, že vláda je měkká. Má tato hra separovanou rovnováhu? Má tato hra společnou rovnováhu?

6. Královská poštovní společnost má monopol na doručování dopisů. Dopisy mohou být běžné (B) nebo urgentní (U). Užitek odesílatele dopisu je dán funkcí $U(p,t) = \frac{\theta}{t} - p$, kde p je cena odeslání, t je doba doručení a θ závisí na typu dopisu. Víme, že $\theta_B = 1$ a $\theta_U = 2$. Rezervační užitek odesílatele při neposlání dopisu je roven 0. Zisk pošty z odeslání dopisu je následující $\Pi(p,t) = p - \frac{1}{t^2}$.
• Předpokládejte, že pošta ví jaký typ dopisu chce odesílatel poslat. Jaké ceny stanoví?

- Předpokládejte, že pošta neví jaká typ dopisu chce odesílatel poslat. Pravděpodobnost, že odesílatel chce poslat urgentní dopis je 1/3 a běžný dopis 2/3. Jaké ceny stanoví?

10. seminář

1. Vzdělání jako signál kvality. Každý člověk může mít vysoké schopnosti (H) nebo nízké schopnosti (L) a rozhoduje se o své úrovni vzdělání (e). Úroveň vzdělání má dvě úrovně e^* a 0. Vzdělaní je nákladnější pro méně schopného e/L než pro schopnějšího e/H. Každá firma nabízí mzdu w, kter8 je rovna očekávané úrovni schopností (tzn. H a L). Najděte rozsah e^*s pro sjednocenou i separovanou rovnováhu této hry. Srovnejte je.

2. Experiment - signalizace

4 Opakované hry

11. seminář

1. Reprezentujte každou z uvedených strategií diagramem
   - Hráč hraje C v první periodě a v každém období po historii, kdy protivník hrál C kromě posledního období. Po jakékoliv jiné historii hraj D (tj. grim-trigger ve které je trest o jedno období odložen).
   - Hráč hraje C v první periodě a v každém období po historii, kdy protivník hrál D v maximálně jednom období. Po jakékoliv jiné historii hraj D (tj. grim-trigger ve které je trest spuštěn až po dvou D).
   - Pavlov. Hráč hraje C v první periodě a v každém období po historii, kdy byl hrán profil (C,C) nebo (D,D). Po jakékoliv jiné historii hraj D.

2. Kdy je profil grim-trigger strategií Nashovou rovnováhou v následujícím vězňově dilematu?

	D	C
D	x,x	y,0
C	0,y	1,1

Table 4: Věznovo dilema

3. Najděte podmínky pro k,x,y a δ, aby profil strategií omezený trest tvořil Nashovu rovnováhu ve výše uvedeném vězňově dilematu (k je počet období ve kterých hraje hráč D po odchýlení).

4. Najděte podmínky pro x,y a δ, aby profil strategií tit-for-tat tvořil Nashovu rovnováhu ve výše uvedeném vězňově dilematu. Ukažte, že tit-for-tat není Nashova rovnováha pro $\delta < 1$ v případě $y \geqq 2x$

5. Mohou být profily strategií z cvičení 1 Nashovou rovnováhou v následujícím vězňově dilematu?

	D	C
D	1,1	3,0
C	0,3	2,2

Table 5: Vězňovo dilema

6. Tvoří profily strategií tit-for-tat a strategií ze cvičení 1 SPE ve vězňově dilematu z tabulky **??**?

12. seminář

1. Co je minmax bod v Cournotově oligopolu s náklady $C_i(q) = cq$ a poptávkou $D(Q) = \alpha - Q$?

2. Co je minmax bod v Hotellingově modelu se dvěma kandidáty?

3. Najděte množinu dostupných výplat ve hře bitva pohlaví. Které výplaty jsou možné v Nashově rovnováze?

4. Najděte množinu dostupných výplat v Hotellingově modelu se dvěma kandidáty. Které výplaty jsou možné v Nashově rovnováze?

5. Překrývající se generace. Mějme opakovanou hru. Každý hráč se narodí v období t a umře v období $t+1$. V každém období jsou tak naživu dva hráči starší a mladší. Každý hráč se narodí s jednou jednotkou čokolády C, která nemůže být skladována. Diskontní faktor je roven 1. Užitkové funkce každého agenta vypadají následovně.

$$U(C) = \begin{cases} -1 & \text{pokud } C < 0,3 \\ C & \text{pokud } C \geqq 0,3 \end{cases}$$

Hráči mohou část své čokolády někomu dát, ale protože je to jediné existující zboží nemohou ji prodat. Akce (mladšího) hráče je spotřebovat X čokolády a dát $1 - X$ čokolády staršímu agentu. Hráči znají všechny minulé akce.

- Jak vypadá SPE, pokud je hra konečná?
- V nekonečně opakované hře vzniknou 2 SPE, která se liší svou pareto-efektivností. Jak vypadají?
- V každém období existuje π, že přijdou barbaři a seberou veškerou čokoládu. Jaká je nejvyšší hodnota π, která umožňuje rovnováhu s $X = 0,5$