1 Strategické hry

1. Ryba hermafordit. Některé hermaforditické ryby si při setkání druhého jedince téhož druhu vybírají, zdali budou hrát roli samce nebo samičky. Každá ryba má preferované pohlaví. Ryba obdrží výplatu H, pokud se páří ve své preferovaném pohlaví a L v opačném případě. Platí, že $H > L$. Uvažujme setkání dvou ryb se stejným preferovaným pohlavím. Pokud se obě rozhodnou pro své nepreferované pohlaví, pak jsou pohlaví přidělena náhodně a každá ryba obdrží výplatu $\frac{1}{2}(H + L)$. Pokud se obě rozhodnou pro páření ve svém preferovaném pohlaví, pak se rozejdou bez páření, hledají si nového partnera a obdrží výplatu S (ocenění šance na nového vhodného partnera). Formulujte tuto situaci jako strategickou hru. Najděte pro dané hodnoty H a L rozsah hodnot S, pro které je hra shodná s vězňovým dilematem.

2. Dělení peněz. Dva lidé se mají mezi sebe rozdělit 10 Kč následujícím způsobem. Každý řekne celé číslo do 10. Pokud je součet jejich čísel maximálně 10, pak každý dostane takovou částku, jaké číslo jmenoval. Pokud je součet jejich čísel větší než 10 a každý řekl jiné číslo, pak osoba, která řekla menší číslo obdrží tuto částku a druhý obdrží zbytek. Pokud je součet jejich čísel větší než 10 a každý řekl stejné číslo, pak každý obdrží 5 Kč. Najděte optimální odpovědi obou hráčů a najděte Nashovu rovnováhu.

3. Varianta hry Lov jelena. Uvažujme hru lov jelena s n hráči. Každý hráč má K jednotek svých zdrojů, které může alokovat mezi lov jelena či zajíce. Označme e_i množství zdrojů investované do lovu jelena hráčem i. Šance, že hráči chytí jelena, závisí na nejnižší hodnotě zdrojů investovaných do lovu jelena určitým hráčem. Označme tuto hodnotu $\min_j e_j$. Výplata hráče i při profilu akcí $(e_1, .., e_n)$ je $2 \min_j e_j - e_i$. Je profil akcí $(e, e, ..., e)$ v němž všichni hráči investují stejné množství zdrojů do lovu jelena Nashovou rovnováhou? Pro jaké hodnoty e to platí? Existují nějaké jiné Nashovy rovnováhy?

4. Přispívání na veřejný statek fixní částkou. Každý z n lidí se rozhoduje, zda přispěje fixní částku na veřejný statek. Statek bude poskytnut jen pokud přispěje alespoň k lidí, kde $2 \leqq k \leqq n$. Příspěvky nejsou vratné. Každý člověk řadí výsledky v následujícím pořadí (i) nepřispěji a statek je poskytnut (ii) přispěji a statek je poskytnut (iii) nepřispěji a statek není poskytnut (iv) přispěji a statek není poskytnut. Formulujte hru, která modeluje tuto situaci a najděte Nashovu rovnováhu.

5. Cournotova hra a technologický pokrok. Co se stane s Nashovou rovnováhou a výstupem firem v Cournotově oligopolu se dvěma firmami, lineární inverzní poptávkou a konstantními průměrnými náklady, pokud jedna z firem zažije technologický pokrok, který sníží její náklady.

6. Volební soutěž a asymetrickými preferencemi. Uvažujme Hotellingův model volební soutěže, kde jsou preference voličů asymetrické. Konkrétně, předpokládejme, že každý volič je indiferentní mezi určitou pozicí nalevo od své preferované pozice a dvojnásobně vzdálenou pozicí směrem doprava od své preferované pozice. Jak to ovlivní Nashovu rovnováhu?

7. Válka do vyčerpání. Dva hráči bojují o objekt, kterého si cení na v a 50% šanci na získání objektu si cení na $\frac{v}{2}$. Hráči se rozhodují o tom, kolik času stráví bojem. Čas, který stráví v boji, je pro ně nákladný. Tzn., že výplata hráče, který bojoval po dobu t_i a získal objekt je $v_i - t_j$ (nemusí bojovat po čase t_j kdy druhý hráč boj vzdal). V případě nezískání objektu je jeho výplata $-t_i$. Pokud oba dva hráči vzdají boj ve stejný okamžik, pak každý získá objekt s pravděpodobností 50 %. Čas chápeme jako spojitou proměnou. Zformulujte hru, která modeluje tuto situaci a nalezněte Nashovy rovnováhy.

8. Prostorová konkurence. Mějme vesnici ve které jsou lidé rovnoměrně rozmístěni kolem cesty. Na každém konci vesnice je jeden obchod. Délku vesnice můžeme normalizovat na hodnotu 1. Každý člověk má transportní náklady s dopravou zboží z obchodu a nakupujte tedy tam, kde je součet ceny a transportních nákladů menší. Součet ceny a nákladů může být vyjádřen jako $p + t(x_i - x_o)$, kde t jsou náklady na jednotku cesty, x_i je pozice spotřebitele a x_o je pozice obchodu. Obchody se simultánně rozhodují o ceně. Určete rovnovážnou cenu. Jak tato ceny závisí na transportních nákladech?
9. Křižovatka. Jedinci z jedné populace řidičů se náhodně po dvou potkávají na křižovatce. Každý řidič na ní může buď zastavit nebo jet dál. Preference řidičů jsou dány následující tabulkou, kde $\epsilon \in (0, 1)$. Najděte symetrickou rovnováhu této hry.
Nyní předpokládejte, že řidiči se cítí vinni, když jedou dál a jejich výplata tím pádem klesne o $\delta > 0$. Ukažte, že řidiči jsou na tom v symetrické rovnováze této hry lépe než v rovnováze původní hry.

	Stop	Jet dál
Stop	$1, 1$	$1-\epsilon, 2$
Jet dál	$2, 1-\epsilon$	$0, 0$

Table 1: Křižovatka

2 Extenzivní hry

1. Holdup game. Hra je podobná ultimátní hře s tím rozdílem, že na začátku hry se hráč 1 rozhoduje o investici. Může investovat buď hodně nebo málo (H nebo L). Čím víc hráč 1 investuje, tím větší je částka (c_H,c_L), kterou hráč 2 poté rozděluje (nabídne x). Hráč 1 může nabídku hráče 1 zamítnout nebo přijmout. Pokud nabídku odmítne, pak oba hráči obdrží výplatu 0. Pokud nabídku přijme, pak hráč 1 získá $x - H$ nebo $x - L$ a hráč 2 získá $c_H - x$ nebo $c_L - x$. Formulujte hru, která modelujte tuto situaci a najděte Nashovy rovnováhy a SPE.

2. Rozmazlené dítě (Na podobné hře založil Becker(1981) svůj model rozhodování v rodině). Akce dítěte a ovlivňuje jeho osobní příjem $c(a)$ i příjem rodičů $p(a)$. Vždy platí $c(a) < p(a)$. Dítě je sobecké, stará se jen o $c(a)$. Rodičům naopak záleží jak na vlastním příjmu, tak na příjmu dítěte. Jejich výplatní funkce je $min\{p(a), \alpha c(a)\}$, kde α ukazuje nakolik jim záleží na příjmu dítěte. Pokud $\alpha = 1$, pak jim na příjmu dítěte záleží stejně jako na vlastním. Rodiče mohou, poté co si dítě volí akci a, transferovat část příjmu k dítěti. (Jejich výplatní funkce při transferu t je $min\{p(a) - t, \alpha(c(a) + t)\}$) Formulujte hru, která modeluje tuto situaci pro $\alpha = 1$ a ukažte, že v SPE dítě maximalizuje společný příjem sebe a rodičů. Jak se změní SPE, pokud $\alpha > 1$?

3. Sekvenční Hotellingův model se dvěma a třemi kandidáty. Uvažujte variantu Hotellingova modelu politické soutěže, ve které se kandidáti nerozhodují v jeden okamžik, ale postupně. Najděte SPE pro $n = 2$ a $n = 3$. Předpokládejte, že každý z hráčů má možnost nevstoupit do volebního boje. Každý kandidát preferuje remízu před nevstoupením a nevstoupení před prohrou. Nejlepší je pro každého pochopitelně vítězství.

4. Hladoví lvi. Skupina lvů s hierarchickou strukturou narazí na zebru. Vedoucí lev se rozhoduje zda zebru sní. Pokud ji nesní, pak zebra uteče. Pokud je vedoucí lev sní, tak bude unaven a lev 2 ho může sníst. Pokud lev 2 nesní lva 1, pak hra končí. Pokud ho sní, pak může být sněden lvem 3. Každý lev preferuje být sytý než být hladový a být hladový před být sněden. Najděte SPE pro případ n lvů. Přežije zebra?

3 Hry s nedokonalými informacemi

1. Předpokládejme, že dvě firmy si konkurují Cournotovským způsobem. Náklady firem jsou $C_1 = cq_1$, $C_2 = c_h q_2$, $C_2 = c_l q_2$, kde $c_h > c_l$. Firma 1 nezná náklady firmy 2, pravděpodobnost nákladů c_h je p. Poptávka má tvar $D(Q) = \alpha - Q$. Najděte Nashovu rovnováhu této hry a srovnejte ji s rovnováhou Cournotova duopolu s dokonalými informacemi.

2. Uvažujme first-price aukci, které se účastní dva hráči a Bernoulliho užitkovou funkcí $x^{1/2}$, kde x je jeho monetární výplata. Ocenění hráčů má rovnoměrné rozdělení na intervalu [0,1]. Ukažte, že v rovnováze oba hráči nabízejí $b_i = \frac{2}{3}v_i$. Srovnejte výnos z této aukce s výnosem z připadné second-price aukce.

3. Uvažujme first-price aukci se společným oceněním, které se účastní 2 hráči. Signály hráčů jsou rozděleny rovnoměrně na intervalu [0,1]. Hodnota objektu je $\alpha t_1 + \beta t_2$. Ukažte, že v Nashově rovnováze oba hráči nabízejí $b_i = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)t_i$.

4. Uvažujme second-price aukci se společným oceněním, které se účastní 2 hráči. Signály hráčů jsou rozděleny rovnoměrně na intervalu [0,1]. Hodnota objektu je $\alpha t_1 + \beta t_2$. Ukažte, že v Nashově rovnováze oba hráči nabízejí $b_i = (\alpha + \beta)t_i$.

5. Vzdělání jako signál kvality. Každý člověk může mít vysoké schopnosti (H) nebo nízké schopnosti (L) a rozhoduje se o své úrovni vzdělání (e). Úroveň vzdělání má dvě úrovně e^* a 0. Vzdělaní je nákladnější pro méně schopného e/L než pro schopnějšího e/H. Každá firma nabízí mzdu w, kter8 je rovna očekávané úrovni schopností (tzn. H a L). Najděte rozsah e^*s pro sjednocenou i separovanou rovnováhu této hry. Srovnejte je.

4 Opakované hry

1. Reprezentujte každou z uvedených strategií diagramem
   - Hráč hraje C v první periodě a v každém období po historii, kdy protivník hrál C kromě posledního období. Po jakékoliv jiné historii hraj D (tj. grim-trigger ve které je trest o jedno období odložen).
   - Hráč hraje C v první periodě a v každém období po historii, kdy protivník hrál D v maximálně jednom období. Po jakékoliv jiné historii hraj D (tj. grim-trigger ve které je trest spuštěn až po dvou D).
   - Pavlov. Hráč hraje C v první periodě a v každém období po historii, kdy byl hrán profil (C,C) nebo (D,D). Po jakékoliv jiné historii hraj D.

2. Najděte podmínky pro k,x,y a δ, aby profil strategií omezený trest tvořil Nashovu rovnováhu ve níže uvedeném vězňově dilematu (k je počet období ve kterých hraje hráč D po odchýlení).?

	D	C
D	x,x	y,0
C	0,y	1,1

Table 2: Věznovo dilema

3. Tvoří profily strategií tit-for-tat SPE ve vězňově dilematu?

	D	C
D	1,1	3,0
C	0,3	2,2

Table 3: Vězňovo dilema

4. Opakovaný bertrandův oligopol. Uvažujme bertnardův oligipol ve kterém má každá firma konstantní průměrné náklady c. Celková poptávka je $D(p)$ a zisk firmy je $\pi(p) = (p - c)D(p)$. Označme jedinou monopolní cenu p^m.
   - Strategie firem je omezený trest, tj. firma stanoví p^m v prvním období a v každém dalším období, pokud všechny firmy stanovily p^m. V opačném případě účtuje cenu c po k period. Pro danou hodnotu δ najděte k, tak aby profil těchto strategií tvořil SPE.
   - Strategie firem je grim-trigger. , tj. firma stanoví p^m v prvním období a v každém dalším období, pokud všechny firmy stanovily p^m. V opačném případě účtuje cenu c po zbytek hry. Vždy když má firma přecenit oproti předchozímu období, utrpí náklady ϵ. Pro jaké hodnoty δ je profil těchto strategií Nashovou rovnováhou? Pro jaké hodnoty δ je profil těchto strategií SPE?