Inverzní matice

Definice: Čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$, pro kterou platí $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$, nazveme regulární. V opačném případě, tedy má-li nulový determinant, ji nazveme singulární.

Věta: Jestliže je $\boldsymbol{A}$ regulární matice, pak existuje matice $\boldsymbol{B}$, pro niž platí $\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.}$

O matici $\boldsymbol{B}$ říkáme, že je inverzní k matici $\boldsymbol{A}$. Inverzní matice je určena jednoznačně, značíme ji $\boxed{\boldsymbol{A}^{-1}}$.

Příklad:

Ověřte, zda je matice $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ inverzní k matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení:

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Přímé řešení systému rovnic pomocí inverzní matice

Je-li $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ systém rovnic s regulární maticí soustavy $\boldsymbol{A}$, pak má jediné řešení

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}.}$$

Příklad: Najděte řešení systému pomocí inverzní matice.

$$\begin{aligned} 2x_1 \; - x_2 &= 2 \\ -5x_1 + 3x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Řešení: Matice soustavy je $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, vektor pravých stran $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Z předchozího příkladu víme, že $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ takže

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zkouška: $L_1 = 2 \cdot 3 - 4 = 2 = P_1, L_2 = -5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = -3 = P_2$.

Přímé řešení systému rovnic pomocí determinantů

Věta: Cramerovo pravidlo: Je-li $\boldsymbol{A}$ regulární matice řádu n a $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran, pak řešení systému $\boldsymbol{A}\cdot\ \boldsymbol{x}\ =\ \boldsymbol{b}$ je určeno jednoznačně a platí $x_i = \frac{|\boldsymbol{B_i}|}{|\boldsymbol{A}|}, i = 1, \dots, n,$ kde matice $\boldsymbol{B_i}$ vzniknou z $\boldsymbol{A}$ nahrazením i-tého sloupce vektorem $\boldsymbol{b}$.

Příklad: Cramerovým pravidlem vyřešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= 4\\
x_1 + 3x_2 - 5\,x_3 &= 4\\
2x_2 + x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

Řešení: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \ |\boldsymbol{A}| = 27.$

$$|\boldsymbol{B_1}| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 81, |\boldsymbol{B_2}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 54, |\boldsymbol{B_3}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 27,$$

Tedy $x_1 = \frac{81}{27} = 3,\ x_2 = \frac{54}{27} = 2,\ x_3 = \frac{27}{27} = 1.$

Použití determinantů k určení inverzní matice

Aplikací Cramerova pravidla na řešení maticové rovnice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$ dostaneme předpis pro prvky matice $\boldsymbol{X}$ inverzní k regulární matici $\boldsymbol{A}$ řádu n: $\boxed{x_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{|\boldsymbol{A}_{ji}|}{|\boldsymbol{A}|}, i, j = 1, \ldots, n,}$

kde $\boldsymbol{A}_{ji}$ je matice vytvořená z $\boldsymbol{A}$ vypuštěním j-tého řádku a i-tého sloupce.

Poznámka: Pro $n = 2$ dostáváme

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}_{11}| & -|\boldsymbol{A}_{21}| \\ -|\boldsymbol{A}_{12}| & |\boldsymbol{A}_{22}| \end{pmatrix} = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.}$$

Příklad: Určete inverzní matici k $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Proveďte zkoušku.

Řešení : $|\boldsymbol{A}| = 1, \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Zkouška: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

Ekvivalentní systémy rovnic

Dva systémy lineárních rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ nazveme ekvivalentní, jestliže každé řešení systému $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je současně řešením systému $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ a naopak.

Věta: Je-li $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ rozšířená matice systému $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a vznikne-li $(\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d})$ z $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ pomocí elementárních transformací, pak je systém $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ ekvivalentní s $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, píšeme $\boxed{(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \sim (\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d}).}$

Eliminační metody řešení systémů: Pomocí vhodných elementárních transformací můžeme převést problém řešení soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ na řešení ekvivalentní soustavy $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ s maticí $\boldsymbol{C}$ ve speciálním tvaru.

Řešení systému s horní trojúhelníkovou maticí

Systém $\boldsymbol{C}\cdot\ \boldsymbol{x}\ = \boldsymbol{d}$, kde $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$

řešíme metodou zpětné substituce: z poslední rovnice vyjádříme $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$. Dosadíme do předposlední rovnice a spočítáme x_{n-1} , atd...

Příklad: Vyřešte systém

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Řešení:

Z poslední rovnice: $x_3 = \frac{6}{2} = 3$, tedy $x_2 = 4x_3 - 5 = 12 - 5 = 7$, potom dostaneme $x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 7 + 14 - 9 = 12$.

Eliminační metody řešení systémů s regulární maticí A

Gaussova eliminační metoda

Matici $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ převedeme elementárními úpravami na matici $(\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d})$, kde $\boldsymbol{C}$ je v horním trojúhelníkovém tvaru a dále postupujeme metodou zpětné substituce.

http://demonstrations.wolfram.com/PlanesSolutionsAndGaussianEliminationOfA33LinearSystem/

Jordanova eliminační metoda

Matici $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ převedeme elementárními úpravami na matici $(\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d})$, kde $\boldsymbol{C}$ je v diagonálním tvaru, tedy dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad &= d_1 \\ c_{22}x_2 \qquad\qquad &= d_2 \\ \ddots \qquad\quad & \\ c_{nn}x_n &= d_n \end{aligned}$$

Přímo určíme $x_1 = \frac{d_1}{c_{11}}, x_2 = \frac{d_2}{c_{22}}, \ldots\ x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$.

Jordanova metoda pro řešení maticových rovnic

Maticovou rovnicí rozumíme m systémů se stejnou maticí soustavy $\boldsymbol{A}$ řádu n a pravými stranami $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_m}$ zapsaných jako $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{B}$ je matice tvořená sloupci $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_m}$ a $\boldsymbol{X}$ je neznámá matice typu (n, m). Pro matici, která je řešením maticové rovnice pak platí, že její sloupce jsou řešením jednotlivých m systémů. Při řešení maticové rovnice Jordanovou metodou upravujeme rozšířenou matici $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$ elementárními úpravami na $(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{D})$. Potom pro neznámou matici $\boldsymbol{X}$ platí $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}$, tedy $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}$.

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Úloha hledání inverzní matice k $\boldsymbol{A}$ je úlohou řešení maticové rovnice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$. Neznámou matici $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ určíme Jordanovou metodou tak, že upravujeme rozšířenou matici $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})$ elementárními úpravami na $(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{D})$. Potom platí $\boxed{\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{D}.}$

Jordanova metoda pro určení inverzní matice

Příklad: Určete inverzní matici k $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & 15 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -120 & 50 & -180 \\ 0 & -15 & 22 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -120 & 50 & -180 \\ 0 & -15 & 0 & -225 & 90 & 330 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -4 & 15 \end{array}\right)$$

Tedy inverzní matice je $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} -12 & 5 & -18 \\ 15 & -6 & -22 \\ 10 & -4 & 15 \end{pmatrix}$.

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti h(**A**)<n

Je-li matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) a přitom $h = h(\boldsymbol{A}) = n$, upravíme rozšířenou matici na schodovitý tvar a dostaneme ekvivalentní systém pouhých h rovnic pro n neznámých. Je možné vhodně vybrat $n - h$ neznámých, které považujeme za parametry a převést je na pravou stranu, tak aby koeficienty neznámých zbylých na levé straně tvořily horní trojúhelníkovou matici. Úlohu pak dořešíme metodou zpětné substituce.

Příklad: Najděte všechna řešení systému

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Matice systému již je ve schodovitém tvaru, platí $h(\boldsymbol{A}) = 3 < n$, při hledání řešení můžeme tedy $n - h = 2$ neznámé zvolit jako parametry a zbylé tři dopočítat. Chceme, aby na levé straně zůstaly neznámé s koeficienty tvořícími horní trojúhelníkovou matici, ponechme zde tedy neznámé odpovídající "začátkům schodů", tedy x_1, x_2 a x_4. Ostatní, tedy x_3 a x_5, převedeme napravo a položíme $x_3 = p, x_5 = q$, kde $p, q \in \mathbb{R}$.

Řešení systému s maticí soustavy hodnosti h(**A**)<n

Dostaneme systém

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_4 &= -p + 2q \\ 3x_2 + 4x_4 &= -6p + q \\ -2x_4 &= -2q \end{aligned}$$

Z poslední rovnice tedy $x_4 = q$, dosadíme do druhé rovnice a obdržíme $3x_2 \ + 4q \ = \ -6p \ + \ q$, tedy $x_2 = -2p - q$. Nakonec dosadíme za x_2a x_4 do první rovnice, $3x_1 + 5(-2p - q) + q = -p + 2q$, po úpravě $x_1 = 3p + 2q$.

Závěr: Množina všech řešení, tzv. obecné řešení, závisí na dvou parametrech. Dosadíme- li za p, q libovolná čísla, dostaneme nějaké tzv. partikulární řešení systému, například pro $p = 1, q = 1$ dostaneme řešení $\boldsymbol{x} = \ (5, -3, 1,1,1)^\top$. Naopak také platí: každé konkrétní řešení lze zapsat ve tvaru $\boldsymbol{x} = \ (3p + 2q, -2p - q, p, q, q)^\top$ pro nějaké p, q.

Poznámka: Systémy s nulovou pravou stranou nazýváme homogenní systémy. Tyto systémy jsou vždy řešitelné (určitě je řešením nulový vektor).

Řešitelnost systému rovnic

Věta: Frobeniova věta

Buď $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ systém m rovnic o n neznámých. Potom jestliže:

- $h(\boldsymbol{A}) < h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, pak systém nemá řešení
- $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$, pak systém má právě jedno řešení
- $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = h < n$, pak systém má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Poznámka: Pokud systém obsahuje rovnici $\boxed{0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = c, c \neq 0}$, pak zřejmě nemá řešení (tedy rozšířená matice obsahuje řádek $(0\ 0\ \ldots\ 0|c)$, proto $h(\boldsymbol{A}) < h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. V těchto případech existují metody přibližného řešení systému, často se používá např. metoda nejmenších čtverců.

http://demonstrations.wolfram.com/LinearEquationsRowAndColumnView/