Lineární kombinace

Jsou-li $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m$ vektory délky n a $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, pak vektor

$$\boxed{c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m}$$

nazveme lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m$.

Příklad: Je vektor $\boldsymbol{x} = (4, -1, 10, 12)$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{y} = (1, 0, 5, 7)$ a $\mathbf{z} = (2, -1, 0, -2)$?

Řešení: Koeficienty $c_1,\ c_2$ lineární kombinace musí vyhovovat soustavě rovnic

$$1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = 4$$
$$0 \cdot c_1 - 1 \cdot c_2 = -1$$
$$5 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = 10$$
$$7 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 = 12$$

Zřejmě jsou například koeficienty $c_1 = 2,\ c_2 = 1$ řešením této soustavy. Tedy

$$\boldsymbol{x} = 2 \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$$

http://demonstrations.wolfram.com/HeadToToeVectorAddition/

Lineární závislost

Řekneme, že vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m$ jsou lineárně závislé, jestliže je mezi nimi aspoň jeden vektor, který je kombinací ostatních. Pokud žádný takový vektor neexistuje, řekneme, že vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad: Vektory $\boldsymbol{x} = (4, -1, 10, 12), \boldsymbol{y} = (1, 0, 5, 7),\ \mathbf{z} = (2, -1, 0, -2)$ z předchozího příkladu jsou lineárně závislé.

Vektory $\boldsymbol{y}$ a $\mathbf{z}$ jsou lineárně nezávislé.

Poznámka: Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vektorová rovnice $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m = 0$ má jediné řešení $\boxed{c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_m = 0.}$

Vektory jsou lineárně závislé, existuje-li i jiné než nulové řešení.

Hodnost matice

Definice: Je-li $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m)$ m-tice n-rozměrných vektorů, pak maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině $\boldsymbol{X}$ nazveme hodností $\boldsymbol{X}$ a značíme $\mathrm{h}(\boldsymbol{X})$.

Poznámka: Uvažujme matici $\boldsymbol{A}$ typu (m, n). Položíme- li za $\boldsymbol{X}$ řádky matice $\boldsymbol{A}$, pak $\mathrm{h}(\boldsymbol{X})$ nazveme řádkovou hodností $\boldsymbol{A}$, pro sloupce matice mluvíme o sloupcové hodnosti.

Příklad: Určete řádkovou a sloupcovou hodnost matice

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Řádky jsou zřejmě lineárně nezávislé (ani jeden není násobkem druhého), takže řádková hodnost je 2. Sloupcová hodnost je také 2, protože poslední dva sloupce jsou evidentně lineárně nezávislé a ostatní jsou jejich lineární kombinací.

Hodnost matice

Věta: Je-li $\boldsymbol{A}$ typu (m, n), pak její sloupcová hodnost je rovna řádkové hodnosti, značíme ji $\mathrm{h}(\boldsymbol{A})$.

Důsledek:

- $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{A}^\top)$
- $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) \leq \min(m, n)$

Příklad: Určete hodnost matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Řešení: První tři řádky jsou evidentně lineárně nezávislé, ale čtvrtý je nulový (tedy závislý na ostatních). Takže hodnost je 3.

Věta: Horní schodovitá matice má hodnost rovnu počtu jejích nenulových řádků.

Elementární úpravy

Uvažujme matici $\boldsymbol{A}$ typu (m, n). Vytvoříme-li z matice $\boldsymbol{A}$ matici $\boldsymbol{B}$ tak, že:

- Vyměníme navzájem dva libovolné řádky matice a zbytek necháme beze změny nebo
- jeden řádek vynásobíme libovolným nenulovým číslem a ostatní řádky necháme beze změny nebo
- k jednomu z řádků matice přičteme libovolný násobek jiného řádku a ostatní necháme beze změny,

pak řekneme, že $\boldsymbol{B}$ vznikla z $\boldsymbol{A}$ pomocí základní elementární transformace. Aplikujeme-li několik těchto základních úprav po sobě, řekneme, že $\boldsymbol{B}$ vznikla z $\boldsymbol{A}$ pomocí elementárních transformací a píšeme $\boxed{\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}}$.

Poznámka: Elementární transformace mají široké využití, například při určování hodnosti matice, řešení systémů rovnic, hledání inverzní matice či výpočtu determinantu.

Elementární úpravy

Příklad: Pomocí elementárních transformací převeďte matici na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení: Nejprve vyměníme první a třetí řádek

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pomocí prvního řádku vynulujeme první číslo na ostatních řádcích:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -14 & -35 \\ 0 & 2 & 12 & 29 \end{pmatrix}$$

Nyní stačí přičíst 2-násobek druhého řádku k 3-násobku třetího.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ \color{red}{0} & -3 & -14 & -35 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

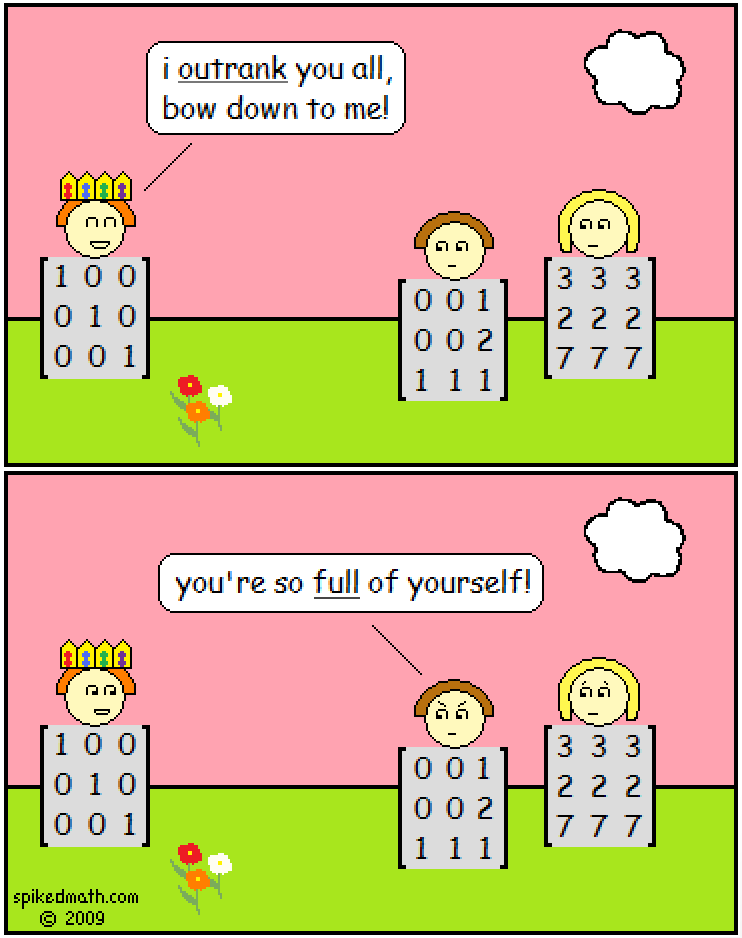
Matice je ve schodovitém tvaru.

Elementární úpravy a hodnost matice

Věta: Elementární transformace nemění hodnost matice.

Příklad: Pro matici z předchozího příkladu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ platí $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3.$

Poznámka: Při řešení úlohy určení hodnosti vždy nejprve převedeme matici pomocí elementárních úprav do schodovitého tvaru a potom určíme hodnost jako počet nenulových řádků.

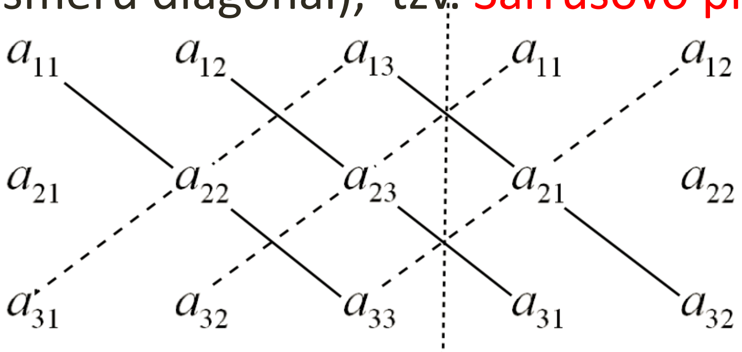


Determinant matice

Definice: Buď $\boldsymbol{A}$ čtvercová matice řádu n. Determinant matice $\boldsymbol{A}$ je číslo značené $|\boldsymbol{A}|$ definované jako

- a_{11} pro $n = 1$
- $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ pro $n = 2$
- $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$

$-(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$ pro $n = 3$ (součiny ve směru diagonál), tzv. Sarrusovo pravidlo



- pro $n \geq 4$ neexistuje obdoba Sarrusova pravidla, determinant definujeme pomocí rozvoje podle prvního řádku jako

$\boxed{a_{11} \cdot |\boldsymbol{A}_{11}| - a_{12} \cdot |\boldsymbol{A}_{12}| + a_{13} \cdot |\boldsymbol{A}_{13}| - a_{14} \cdot |\boldsymbol{A}_{14}| + \cdots}$, kde $\boldsymbol{A}_{ij}$ je submatice, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Determinant matice

Poznámka: Obdobným způsobem lze počítat determinant rozvojem podle jiného řádku.
Věta: Pro každou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ platí: $\boxed{|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^\top|}$ (tedy lze determinant rozvíjet i podle sloupců).

Příklad: Vypočítejte determinanty

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, |\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - (0 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 1) = 9$$

Výpočet determinantu rozvojem

Pokračování: $|\boldsymbol{C}| =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} - 0$$

$$= 2 \cdot (-10 + 5) - 1 \cdot 0 \ - 3 \cdot (-20 + 40) = -70.$$

Věta: Determinant matice v horním trojúhelníkovém tvaru je roven součinu jejích diagonálních členů.

Příklad: $\begin{vmatrix} \color{red}{7} & 0 & -1 \\ 0 & \color{red}{1} & 4 \\ 0 & 0 & \color{red}{5} \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot 5.$

Poznámka: Při výpočtu deteminantu lze pomocí elementárních úprav převést matici na schodovitý (resp. horní trojúhelníkový) tvar.

Pozor: Některé transformace mění hodnotu determinantu!

http://demonstrations.wolfram.com/33DeterminantsByExpansion/

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav

Jestliže matice $\boldsymbol{B}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ pomocí základní elementární transformace

- výměna řádků, pak $|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$
- vynásobení jednoho řádku číslem α, pak $|\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{A}|$
- přičtením jednoho řádku k jinému, pak $|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|$

Příklad: Určete hodnotu determinantu matice z předchozího příkladu pomocí elementárních úprav.

Řešení: $|\boldsymbol{C}| =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & 35 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-1) \cdot (-14) \cdot 2{,}5 = -70$$

http://demonstrations.wolfram.com/DeterminantsSeenGeometrically/