Základní Nový Keynesiánský model

29. října 2020

Cílem tohoto textu je co nejpodrobněji vysvětlit odvození „kanonického“ Nového Keynesiánský modelu, tak jak jej ve třetí kapitole své knihy představuje Galí (2015). Základní Nový Keynesiánský dynamický stochastický model všeobecné rovnováhy (NK DSGE) se skládá z Eulerovy rovnice (či IS křivky) popisující chování domácností, Nové Keynesiánské Phillipsovy křivky (NK PC) popisující chování firem, a Taylorova pravidla reprezentující centrální banku. Nový keynesiánský model je také zmiňován proto, že se v posledních letech stal základním stavebním kamenem modelů analyzujících například dopady hospodářských politik, fluktuace v rámci hospodářského cyklu, či problematiku přerozdělování bohatství.

Oproti RBC modelům a klasickému monetárním modelu zavádí základní NK model dva zásadní předpoklady. Za prvé, místo dokonalé konkurence na trhu statků nyní budeme předpokládat monopolistickou konkurenci a existenci tržní síly (firma bude tedy stanovovat optimální cenu vzhledem k poptávce domácností). Za druhé, zavedeme předpoklad strnulých cen za požití Calvo (1983)-Yun (1996) modelu - firmy budou moci stanovit optimální cenu v daném časovém období pouze s určitou pravděpodobností.

Tyto dva předpoklady nám zaručí, že monetární šoky v modelu budou mít krátkodobý efekt i na reálnou ekonomiku (oproti tomu v RBC modelech platí i krátkodobá neutralita peněz). Zájemcům pak doporučuji k přečtení empirický článek od Galího (1999), ve kterém diskutuje problémy RBC modelů reprodukovat některá stylizovaná fakta pro ekonomiky zemí G7, která jsou však konzistentní se základním NK modelem.

1 Reprezentativní domácnost

Odvození modelu začneme popisem problému domácnosti. Předpokládáme, že ekonomika je obývána velkým počtem identických domácností. Reprezentativní domácnost maximalizuje následující objektivní funkci

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t; Z_t) \tag{1}$$

kde C_t je spotřební koš, N_t je množství odpracovaných hodin, Z_t je exogenní šok do preferencí, a $\beta \in (0,1)$ značí diskontní faktor. Oproti předcházejícím tématům zavádíme do modelu diferencované statky, jejich spotřebu agregujeme do tzv. „spotřebního koše“. Motivací k tomuto zavedení je to, že se v reálu také rozhodujeme mezi spotřebou a úspory na základě toho co spotřebováváme. Spotřební koš má podobu agregátoru s konstantní elasticitou substituce

$$C_t \equiv \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}} di \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \tag{2}$$

kde $C_t(i)$ označuje množství statku i spotřebovaného domácností v čase t; předpokládáme tedy kontinuum statků reprezentovaných na intervalu $[0,1]$.[1] Budeme uvažovat následující užitkovou funkci domácnosti

$$U(C_t, N_t; Z_t) = \left(\frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right) Z_t \tag{3}$$

[1] Nenechte se zastrašit tím ošklivě vypadajícím integrálem. Koš (2) není ničím jiným než prostým součtem jednotlivých statků $C_t(i)$, které jsou vzájemně nedokonalými substituty, a s elasticitou substituce ϵ.

kde $\sigma \geq 0$ a $\varphi \geq 0$ jsou parametry a $z_t = \log Z_t$ je AR(1) exogenní proces

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_t^z \tag{4}$$

Reprezentativní domácnost maximalizuje svou objektivní funkci (1) vzhledem k rozpočtovému omezení

$$\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + D_t \tag{5}$$

kde $P_t(i)$ je cena statku i, W_t je nominální mzda, B_t zastupuje nákupy dluhopisů splatných za jedno časové období (s cenou Q_t), a D_t jsou dividendy z vlastněných firem.[2]

Poznámka - CES funkce

Rozveďme motivaci využití volby spotřebního koše jako agregátoru s konstantní elasticitou substituce na příkladu s konečným počtem statků. Už ze základního kurzu mikroekonomie víme, že agregátní spotřební funkce, lze zapsat jako funkce obsahující jednotlivé typy statků (uvažujme N statků), například

$$c = c(c_1, c_2, \ldots, c_N).$$

V této funkci zastupuje označení c_1, c_2 až c_N jednotlivé statky (například film, večeře, ...). I v novokeynesiánském pojetí musí tato funkce splňovat předpoklad, že je dvakrát diferencovatelná a platí $\frac{\delta c(.)}{\delta c_j} > 0$ a $\frac{\delta^2 c(.)}{\delta^2 c_j} < 0$. Pro konečné množství statků může naše spotřební funkce (funkce se nazývá Constant elasticity of substitution - CES) nabývat následující podobu

$$c = c(c_1, c_2, \ldots, c_N) = \left[c_1^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} + c_2^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} + \cdots + c_N^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}},$$

kde ϵ je elasticita substituce mezi diferencovanými statky. V případě že zvolíme $\epsilon \to \infty$, pak lze ukázat, že $\lim_{\epsilon \to \infty} \frac{\epsilon}{\epsilon-1} = 1$ a spotřební funkce získá následující tvar $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_N$, což odpovídá spotřební funkci s dokonalými substituty. My ovšem chceme pracovat s diferencovanými statky (ne dokonale substituovatelnými). Toto nám zaručí volba parametru ϵ tak, aby platilo $\frac{\epsilon}{\epsilon-1} > 1$.

1.1 Optimální alokace spotřebních výdajů

Nyní budeme zkoumat rozhodování reprezentativní domácnosti o tom, jak optimálně alokovat své spotřební výdaje mezi jednotlivé statky $C_t(i)$. Výstupem této optimalizace bude množina poptávkových rovnic pro jednotlivé statky $C_t(i)$, a dále si odvodíme agregátní cenový index P_t.

Konkrétně tedy budeme zkoumat problém, kdy reprezentativní domácnost maximalizuje spotřebu C_t danou (2) pro jakoukoliv úroveň výdajů X_t

$$X_t \equiv \int_0^1 P_t(i)C_t(i)di \tag{6}$$

Lagrangián pro tuto optimalizaci spotřebních výdajů má podobu

$$\max_{\{C_t(i)\}_{t=0}^{\infty}} \mathcal{L} = \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}} di \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} - \lambda_t \left(\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di - X_t \right)$$

[2] Integrálu $\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di$ se opět nelekejte, je to jen součet výdajů na spotřební statky, jenž jsou indexovány na intervalu $[0, 1]$.

Dostaneme následující podmínku prvního řádu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t(i)} = \frac{\epsilon}{\epsilon-1}\left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}}di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}-1}\frac{\epsilon-1}{\epsilon}C_t(i)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}-1} - \lambda_t P_t(i) = 0$$

$$\left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}}di\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}} = \lambda_t P_t(i)$$

$$\left[\left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}}di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{1}{\epsilon}} C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}} = \lambda_t P_t(i)$$

$$C_t^{\frac{1}{\epsilon}} C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}} = \lambda_t P_t(i)$$

Tato rovnice platí pro všechny statky $i \in [0,1]$. Pro každé dva statky (i,j) tedy máme

$$\frac{C_t^{\frac{1}{\epsilon}} C_t(i)^{-\frac{1}{\epsilon}}}{P_t(i)} = \lambda_t \tag{7}$$

$$\frac{C_t^{\frac{1}{\epsilon}} C_t(j)^{-\frac{1}{\epsilon}}}{P_t(j)} = \lambda_t \tag{8}$$

Rovnici (7) položíme rovnu (8) a dostaneme poptávkovou rovnici po statku i

$$C_t(i) = C_t(j)\left(\frac{P_t(i)}{P_t(j)}\right)^{-\epsilon}$$

Tento výraz dosadíme do spotřebních výdajů domácnosti (6), které slouží jako omezení naší optimalizační úlohy

$$X_t \equiv \int_0^1 P_t(i)C_t(i)di = \int_0^1 P_t(i)C_t(j)\left(\frac{P_t(i)}{P_t(j)}\right)^{-\epsilon}di = C_t(j)P_t(j)^{\epsilon}\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}di \tag{9}$$

Nyní z této rovnice vyjádříme $C_t(j)$

$$C_t(j) = \frac{X_t P_t(j)^{-\epsilon}}{\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}di}$$

Tento vztah platí pro každé (i,j); nyní uvažujme situaci kdy $i=j$, a dosadíme do definice agregátního spotřebního indexu C_t (2)

$$C_t \equiv \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}}di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} = \left(\int_0^1 \left[\frac{X_t P_t(i)^{-\epsilon}}{\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}}\right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

$$= X_t\left(\int_0^1 \frac{P_t(i)^{1-\epsilon}}{\left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}\right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} = X_t\left(\left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}di\right)^{1-\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

$$= X_t\left(\left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}di\right)^{1-\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} = X_t\left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon}di\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}}$$

Tento vztah použijeme k definici P_t jako výdajů potřebných k zakoupení jedné jednotky C_t, tedy $P_t \equiv X_t \mid_{C_t=1}$

$$C_t \equiv X_t \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di \right)^{\frac{1}{\epsilon-1}}$$

$$1 \equiv P_t \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di \right)^{\frac{1}{\epsilon-1}}$$

$$P_t \equiv \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \tag{10}$$

Nyní si odvodíme výraz pro celkové spotřební výdaje jako funkci agregátních veličin. Použijeme k tomu vztah vycházející z definice spotřebních výdajů (9)

$$X_t = C_t(j) P_t(j)^{\epsilon} \int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di$$

$$X_t = C_t(j) P_t(j)^{\epsilon} \left[\left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \right]^{1-\epsilon}$$

$$X_t = C_t(j) P_t(j)^{\epsilon} P_t^{1-\epsilon}$$

Tento vztah platí opět pro všechna (i, j), a můžeme jej tedy přepsat jako

$$C_t(i) = \left(\frac{P_t(i)}{P_t} \right)^{-\epsilon} \frac{X_t}{P_t} \tag{11}$$

Rovnici (11) dosadíme do definice spotřebního koše (2) a upravíme

$$C_t = \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}} di \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} = \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{P_t(i)}{P_t} \right)^{-\epsilon} \frac{X_t}{P_t} \right)^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} di \right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

$$= X_t P_t^{\epsilon-1} \left[\left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \right]^{-\epsilon} = X_t P_t^{\epsilon-1} P_t^{-\epsilon} = X_t P_t^{-1}$$

Vidíme tedy, že

$$X_t \equiv \int_0^1 P_t(i) C_t(i) di = P_t C_t \tag{12}$$

což znamená, že celkové spotřební výdaje domácnosti mohou být vyjádřeny jako násobek cenového indexu a spotřebního indexu.

A konečně dosazením (12) do (11) získáme poptávku domácnosti po jednotlivých spotřebních statcích

$$C_t(i) = \left(\frac{P_t(i)}{P_t} \right)^{-\epsilon} C_t \tag{13}$$

Vidíme, že poptávka je klesající funkcí relativní ceny, a rostoucí funkcí celkové spotřeby (která bude záviset na důchodu).

1.2 Optimální celková spotřeba a nabídka práce

V této podkapitole budeme řešit standardní problém maximalizace užitku reprezentativní domácnosti. Cílem domácnosti je maximalizovat objektivní funkci (1) vzhledem k omezení (5). Aby v rozpočtovém omezení vystupovaly pouze agregátní veličiny, dosadíme do něj (12) a získáme

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t + D_t \tag{14}$$

Lagrangián pro problém maximalizace užitku domácnosti pak bude mít následující podobu

$$\max_{\{C_t,N_t,B_t\}_{t=0}^{\infty}} \mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{C_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}\right) Z_t \\ +\lambda_t \left[B_{t-1} + W_t N_t + D_t - P_t C_t - Q_t B_t\right] \end{array} \right\} \tag{15}$$

Podmínky prvního řádu jsou

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} &= \beta^t \left\{ Z_t C_t^{-\sigma} - \lambda_t P_t \right\} && = 0 \\
\frac{Z_t C_t^{-\sigma}}{P_t} & && = \lambda_t && (16) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} &= \beta^t \left\{ -Z_t N_t^{\varphi} + \lambda_t W_t \right\} && = 0 \\
\frac{Z_t N_t^{\varphi}}{W_t} & && = \lambda_t && (17) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} &= -\beta^t \lambda_t Q_t + \beta^{t+1} E_t \lambda_{t+1} && = 0 \\
\lambda_t Q_t & && = \beta E_t \lambda_{t+1} && (18)
\end{aligned}$$

Rovnice (16) a (17) nám dají následující nabídku práce domácnosti (intratemporální podmínku optimality)

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\varphi} \tag{19}$$

Kombinací rovnic (16) a (18) pak dostaneme Eulerovu rovnici (intertemporální podmínka optimality pro úspory a spotřebu), kde $\Pi_t \equiv \frac{P_t}{P_{t-1}}$ značí hrubou míru inflace

$$\begin{aligned}
\frac{Z_t C_t^{-\sigma}}{P_t} Q_t &= \beta E_t \left\{ \frac{Z_{t+1} C_{t+1}^{-\sigma}}{P_{t+1}} \right\} \\
Q_t &= \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{Z_{t+1}}{Z_t} \right) \frac{1}{\Pi_{t+1}} \right\} && (20)
\end{aligned}$$

1.2.1 Log-linearizace

Log linearizaci intratemporální podmínky optimality domácnosti provedeme tzv. exaktní metodou - rovnici vydělíme jejím ustáleným stavem a zlogaritmujeme[3]

$$\begin{aligned}
\frac{W_t/\bar{W}}{P_t/\bar{P}} &= (C_t/\bar{C})^{\sigma} (N_t/\bar{N})^{\varphi} \\
\hat{w}_t - \hat{p}_t &= \sigma \hat{c}_t + \varphi \hat{n}_t && (21)
\end{aligned}$$

Eulerovu rovnici log-linearizujeme rovněž pomocí exaktní metody. V ustáleném stavu s nulovou inflací, který ve své učebnici uvažuje Galí (2015), platí $\bar{\Pi} = 1$ a Eulerova rovnice se nám zredukuje na $\bar{Q} = \beta$. Označme si krátkodobou nominální úrokovou míru jako $i_t \equiv -\log Q_t$ a její ustálený stav $\rho \equiv -\log \beta = -\log \bar{Q}$. Vydělením Eulerovy rovnice (20) jejím ustáleným stavem a zlogaritmováním dostaneme

$$\begin{aligned}
\hat{q}_t &= -\sigma(E_t \hat{c}_{t+1} - \hat{c}_t) + E_t \hat{z}_{t+1} - \hat{z}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1} \\
\hat{c}_t &= E_t \hat{c}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) + \frac{1}{\sigma}(\hat{z}_t - E_t \hat{z}_{t+1}) && (22)
\end{aligned}$$

[3]Budeme používat standardní značení kdy pro proměnnou X_t značí $\bar{X}$ její ustálený stav, $\hat{x}_t = \log X_t - \log \bar{X}$ její log-odchylku od ustáleného stavu, a $x_t = \log X_t$ logaritmus dané proměnné.

Pokud dále použijeme skutečnost že $\log \bar{\Pi} = 0$, odečteme ustálené stavy spotřeby a šoku do preferencí Z_t (který je v logaritmu taktéž nulový) a použijeme (4), dostaneme Galího (2015, s. 54) verzi Eulerovy rovnice

$$c_t = E_t c_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t \pi_{t+1} - \rho) + \frac{1}{\sigma}(1 - \rho_z) z_t \tag{23}$$

2 Reprezentativní firma

Nyní se budeme věnovat reprezentativní firmě. Předpokládáme, že ekonomika se skládá z kontinua firem indexovaných na intervalu $i \in [0, 1]$. Každá firma produkuje diferencovaný statek, avšak všechny firmy používají identickou technologii, popsanou následující produkční funkcí

$$Y_t(i) = A_t N_t(i)^{1-\alpha} \tag{24}$$

A_t je exogenní technologický šok, který je specifikován jako stacionární AR(1) proces

$$\log A_t \equiv a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a \tag{25}$$

Každá firma čelí poptávce (13), přičemž agregátní cenovou hladinu P_t a spotřební index C_t bere jako daný. Zásadní změnou oproti RBC modelům bude zavedení předpokladu strnulých cest, který povede k narušení neutrality peněz v krátkém období. V každém časovém období může každá firma změnit cenu svého produktu pouze s pravděpodobností $1 - \theta$. V každém časovém období tedy $1 - \theta$ firem změní svou cenu, zatímco θ firem ponechá cenu produktu nezměněnou. Tento přístup poprvé použil Calvo (1983).

2.1 Agregátní cenová dynamika

Model strnulých cen dle Calva implikuje následující agregátní cenovou dynamiku. Agregátní cenový index nám definuje rovnice (10)

$$P_t = \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

Calvo model nám říká, že každém časovém období t je $1 - \theta$ firem náhodně vybráno, aby reoptimalizovaly svou cenu na $P(i)_t^*$. θ náhodně vybraných firem pak cenu nezmění, a zvolí tedy cenu $P(i)_{t-1}$. Cenový index tedy můžeme přepsat jako

$$P_t = \left(\int_0^\theta P(i)_{t-1}^{1-\epsilon} di + \int_\theta^1 P(i)_t^{*1-\epsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

Jelikož jsou všechny reoptimalizující firmy identické, zvolí vždy identickou cenu P_t^*. A jelikož reoptimalizující firmy byly zvoleny náhodně, průměrná cena ne-reoptimalizujících firem odpovídá agregátní cenové hladině v $t - 1$ s celkovou masou θ. Cenový index tedy můžeme přepsat jako

$$P_t = \left[\theta P_{t-1}^{1-\epsilon} + (1 - \theta) P_t^{*1-\epsilon} \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}$$

Definujme si hrubou míru inflace jako $\Pi \equiv P_t / P_{t-1}$. Obě strany agregátního indexu pak můžeme podělit P_{t-1} a dostaneme

$$\Pi_t^{1-\epsilon} = \theta + (1 - \theta) \left(\frac{P_t^*}{P_{t-1}} \right)^{1-\epsilon} \tag{26}$$

2.1.1 Log-linearizace

Log-linearizaci rovnice (26) provedeme za použití triku $X_t = \bar{X}e^{\hat{x}_t}$ (a jako vždy uvažujeme ustálený stav s nulovou inflací)

$$\begin{aligned} e^{(1-\epsilon)\hat{\pi}_t} &= \theta + (1-\theta)\frac{e^{(1-\epsilon)\hat{p}^*_t}}{e^{(1-\epsilon)\hat{p}_{t-1}}} \\ (1-\epsilon)\hat{\pi}_t &= (1-\theta)(1-\epsilon)(\hat{p}^*_t - \hat{p}_{t-1}) \\ \hat{\pi}_t &= (1-\theta)(\hat{p}^*_t - \hat{p}_{t-1}) \\ \hat{p}^*_t - \hat{p}_{t-1} &= \frac{1}{1-\theta}\hat{\pi}_t \end{aligned} \tag{27}$$

2.2 Optimální cena

Firma i reoptimalizující cenu v čase t zvolí cenu P^*_t. Tato cena je řešením následujícího problému maximalizace současné tržní hodnoty zisku firmy

$$\max_{P^*_t} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ \Lambda_{t,t+k} \left[P^*_t Y_{t+k|t}(i) - TC^n_{t+k}(i) \right] \right\} \tag{28}$$

vzhledem k sekvenci následujících omezení (v podobě poptávkových funkcí (13))

$$Y_{t+k|t}(i) = \left(\frac{P^*_t}{P_{t+k}} \right)^{-\epsilon} C_{t+k} \tag{29}$$

pro $k = 0, 1, 2, ...$ kde $Y_{t+k|t}(i)$ je produkt v čase $t+k$ pro firmu i reoptimalizující cenu v čase t, $\Lambda_{t,t+k} \equiv \beta^k \frac{U_{c,t+k}}{U_{c,t}} = \beta^k \left\{ \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{Z_{t+k}}{Z_t} \right) \left(\frac{P_t}{P_{t+k}} \right) \right\}$ je stochastický diskontní faktor (viz. Eulerova rovnice (20)) a $TC^n_{t+k}(i)$ jsou nominální náklady (které budou záviset na produktu $Y_{t+k|t}(i)$). Všimněte si, že θ^k je pravděpodobnost že cena P^*_t stanovená v čase t setrvá dalších k časových období.

Jelikož náš jednoduchý model neobsahuje kapitál ani žádné jiné vstupy do produkce, celkové náklady firmy jsou jen mzdové náklady. S použitím produkční funkce (24) dostaneme

$$TC^n_{t+k}(i) = W_{t+k}N_{t+k}(i) = W_{t+k}\left(\frac{Y_{t+k|t}(i)}{A_{t+k}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{30}$$

Pro o trochu větší přehlednost dalších odvození si už nyní vyjádříme mezní náklady firmy a derivaci poptávky (29) podle optimální ceny P^*_t

$$\begin{aligned} MC^n_{t+k}(i) \equiv \frac{\partial TC^n_{t+k}(i)}{\partial Y_{t+k|t}(i)} &= \frac{1}{1-\alpha} W_{t+k} \left(\frac{Y_{t+k|t}(i)}{A_{t+k}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \frac{1}{A_{t+k}} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} W_{t+k} A_{t+k}^{-\frac{1}{1-\alpha}} Y_{t+k|t}(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{t+k|t}(i)}{\partial P^*_t} &= -\epsilon \left(\frac{P^*_t}{P_{t+k}} \right)^{-\epsilon-1} \frac{C_{t+k}}{P_{t+k}} = -\epsilon \left(\frac{P^*_t}{P_{t+k}} \right)^{-\epsilon} \frac{C_{t+k}}{P^*_t} \\ &= -\frac{\epsilon}{P^*_t} Y_{t+k|t}(i) \end{aligned} \tag{32}$$

Nyní získáme podmínku prvního řádu zderivováním cílové funkce (28) podle P^*_t

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ \Lambda_{t,t+k} \left[Y_{t+k|t}(i) + P^*_t \frac{\partial Y_{t+k|t}(i)}{\partial P^*_t} - MC^n_{t+k}(i) \frac{\partial Y_{t+k|t}(i)}{\partial P^*_t} \right] \right\} = 0$$

Dosadíme (32) a upravíme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k E_t\left\{\Lambda_{t,t+k}\left[Y_{t+k|t}(i)-\epsilon Y_{t+k|t}(i)+MC^n_{t+k}(i)\frac{\epsilon}{P^*_t}Y_{t+k|t}(i)\right]\right\}=0$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k E_t\left\{\Lambda_{t,t+k}Y_{t+k|t}(i)\left[1-\epsilon+MC^n_{t+k}(i)\frac{\epsilon}{P^*_t}\right]\right\}=0$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k E_t\left\{\Lambda_{t,t+k}Y_{t+k|t}(i)\left[P^*_t-\frac{\epsilon}{\epsilon-1}MC^n_{t+k}(i)\right]\right\}=0$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k E_t\left\{\Lambda_{t,t+k}Y_{t+k|t}(i)\left[P^*_t-\mathcal{M}MC^n_{t+k}(i)\right]\right\}=0 \tag{33}$$

kde $\mathcal{M}\equiv\frac{\epsilon}{\epsilon-1}$. Z rovnice (33) tedy vidíme, že firma stanoví optimální cenu P^*_t jako přirážku $\mathcal{M}$ k očekávaným mezním nákladům. Povšimněte si, že v limitním případě bez nominální cenové rigidity (kdy $\theta=0$) se nám rovnice (33) zjednoduší na

$$P^*_t=\mathcal{M}MC^n_t(i).$$

Parametr $\mathcal{M}$ je interpretovatelný jako optimální přirážka při absenci nákladů přizpůsobení ceny. Z tohoto důvodu je $\mathcal{M}$ časkto nazývána jako „přirozená“ nebo „bezfrikční“ přirážka. Odtud je $\mathcal{M}$ konstantní za předpokladu časově invariatní elasticity substituce ϵ.

2.2.1 Log-linearizace optimální ceny

Nyní se budeme věnovat log-linearizaci rovnice (33). Tu si pro naše potřeby drobně upravíme do následujícího tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k E_t\left\{\Lambda_{t,t+k}Y_{t+k|t}(i)\left[\frac{P^*_t}{P_{t-1}}-\mathcal{M}\frac{MC^n_{t+k}(i)}{P_{t+k}}\frac{P_{t+k}}{P_{t-1}}\right]\right\}=0 \tag{34}$$

Stejně jako v Galího (2015) učebnici budeme uvažovat ustálený stav s nulovou inflací (kde $\frac{P^*_t}{P_{t-1}}=\frac{P_t}{P_{t-k}}=1$), a ve kterém z definice diskontního faktoru platí $\bar{\Lambda}=\beta$.

Dále do (34) dosadíme definici diskontního faktoru, zavedeme definici reálných mezních nákladů $MC^r_{t+k}(i)\equiv\frac{MC^n_{t+k}(i)}{P_{t+k}}$ a rozdělíme nekonečnou sumu na dvě části

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left\{\frac{U_{c,t+k}}{U_{c,t}}Y_{t+k|t}(i)\frac{P^*_t}{P_{t-1}}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}(\theta\beta)^k E_t\left\{\mathcal{M}\frac{U_{c,t+k}}{U_{c,t}}Y_{t+k|t}(i)MC^r_{t+k}(i)\frac{P_{t+k}}{P_{t-1}}\right\} \tag{35}$$

V ustáleném stavu musí platit

$$1=\mathcal{M}\overline{MC}^r(i) \tag{36}$$

Nyní provedeme log-linearizaci za použití triku $X_t=\bar{X}\frac{X_t}{\bar{X}}=\bar{X}e^{\hat{x}_t}$ a Taylorovy aproximace $\hat{x}_t$ kolem ustáleného stavu $\hat{x}_t$ (tedy nuly). Jelikož $\frac{U_{c,t+k}}{U_{c,t}}Y_{t+k|t}(i)$ vystupují na obou stranách rovnice ve shodném multiplikativním tvaru, po linearizaci se navzájem odečtou a tudíž je při log-linearizaci můžeme ignorovat

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\frac{U_{c,t+k}}{U_{c,t}}Y_{t+k|t}(i)\frac{e^{\hat{p}^*_t}}{e^{\hat{p}_{t-1}}}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\frac{U_{c,t+k}}{U_{c,t}}Y_{t+k|t}(i)e^{\hat{mc}^r_{t+k}(i)}\frac{e^{\hat{p}_{t+k}}}{e^{\hat{p}_{t-1}}}\right\}$$

Po Taylorově aproximaci dostaneme

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\hat{mc}_{t+k}^r(i) + \hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1}\right\}$$

Nyní využijeme skutečnosti, že $\hat{p}_t^*$ a $\hat{p}_{t-1}$ na levé straně rovnice nezávisí na k a vzorec pro nekonečnou sumu, jenž pro $(\beta\theta) < 0$ říká $\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k = \frac{1}{1-\beta\theta}$

$$\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1} = (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\hat{mc}_{t+k}^r(i) + \hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1}\right\} \tag{37}$$

Tato rovnice je ekvivalentem rovnice (11) v Galím (2015, s. 57) - pro obdržení stejného tvaru stačí aplikovat trik s nekonečnou sumou i na $\hat{p}_{t-1}$ a pro $\log \overline{mc}^r(i) = \log(1/\mathcal{M}) \equiv -\mu$ a uvědomit si, že Galí provádí linearizaci trochu odlišným způsobem (pouze v logaritmech, a ne v log odchylkách od ustáleného stavu). Tato rovnice říká, že v případě, že existuje cenová strnulost ($\theta > 0$), firmy nastavují cenu vpředhledníсně. Volí cenu ($\hat{p}_t^*$), která koresponduje s přirážkou okolo váženého průměru jejich aktuálních a očekávaných nominálních mezních nákladů s vahou, která je proporcionální pravděpodobnosti (θ^k), že stanovená cena zůstane efektivní v každém časovém horizontu a je přenásobená kumulativním diskontním faktorem (β^k).

3 Rovnováha a Nová Keynesianská Phillipsova křivka

V rovnováze předpokládáme, že je nabídka rovna poptávce. Jelikož je v našem jednoduchém modelu spotřeba jedinou složkou poptávky, musí v rovnováze platit $Y(i) = C(i)$. Definujme agregátní produkt jako CES index produkce jednotlivých firem i

$$Y_t \equiv \left(\int_0^1 Y_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}} di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \tag{38}$$

V rovnováze pak musí platit

$$Y_t = C_t \tag{39}$$

Agregátní spotřeba jako jediný zdroj poptávky v modelu je determinována Eulerovou rovnicí (22), která společně s výše uvedenou podmínkou rovnováhy implikuje

$$\hat{y}_t = E_t\hat{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(\hat{i}_t - E_t\hat{\pi}_{t+1}) + \frac{1}{\sigma}(\hat{z}_t - E_t\hat{z}_{t+1}) \tag{40}$$

Agregátní zaměstnanost je definována jako součet zaměstnanosti v jednotlivých firmách

$$N_t = \int_0^1 N_t(i)di$$

Dosadíme produkční funkci (24), poptávku (13) a podmínky rovnováhy $Y_t = C_t$ a $Y_t(i) = C_t(i)$

$$\begin{aligned} N_t &= \int_0^1 \left(\frac{Y_t(i)}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \int_0^1 \left[\left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\epsilon}\frac{Y_t}{A_t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} di \\ &= \left(\frac{Y_t}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\epsilon}{1-\alpha}} di = \left(\frac{Y_t}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Delta_t \end{aligned} \tag{41}$$

kde $\Delta_t \equiv \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\epsilon}{1-\alpha}} di$ je míra cenové disperse. Tuto rovnici log-linearizujeme pomocí exaktní metody a dostaneme

$$\hat{n}_t = \frac{1}{1-\alpha}(\hat{y}_t - \hat{a}_t) + \widehat{\Delta}_t$$

Za okamžik si dokážeme, že cenová disperse Δ_t je až do aproximace prvního řádu rovna jedné, a proto získáme následující rovnici určující agregátní zaměstnanost pro daný produkt a technologii

$$\hat{n}_t = \frac{1}{1-\alpha}(\hat{y}_t - \hat{a}_t) \tag{42}$$

3.1 Cenová disperse

Našim cílem je ukázat, že následující vztah platí až do aproximace prvního řádu

$$\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\epsilon}{1-\alpha}} di = 1 \tag{43}$$

Agregátní cenový index je definován jako

$$P_t = \left(\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di\right)^{\frac{1}{1-\epsilon}} \tag{44}$$

Ten můžeme upravit

$$\begin{aligned}
P_t^{1-\epsilon} &= \int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di \\
1 &= \int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{1-\epsilon} di \\
1 &= \int_0^1 \frac{e^{(1-\epsilon)\log P_t(i)}}{e^{(1-\epsilon)\log P_t}} di \\
1 &= \int_0^1 e^{(1-\epsilon)(p_t(i)-p_t)} di
\end{aligned} \tag{45}$$

Taylorova aproximace druhého řádu (45) okolo $p_t(i) = p_t$ je

$$\begin{aligned}
1 &\simeq \int_0^1 \left[1 + (1-\epsilon)(p_t(i)-p_t) + \frac{1}{2}(1-\epsilon)^2(p_t(i)-p_t)^2\right] di \\
1 &\simeq 1 + (1-\epsilon)\int_0^1 (p_t(i)-p_t)di + \frac{1}{2}(1-\epsilon)^2 \int_0^1 (p_t(i)-p_t)^2 di \\
0 &\simeq -(1-\epsilon)p_t + (1-\epsilon)\int_0^1 p_t(i)di + \frac{1}{2}(1-\epsilon)^2 \int_0^1 (p_t(i)-p_t)^2 di \\
p_t &\simeq \int_0^1 p_t(i)di + \frac{1}{2}(1-\epsilon)\int_0^1 (p_t(i)-p_t)^2 di
\end{aligned} \tag{46}$$

Rovnice (46) ukazuje že až do aproximace prvního řádu je $p_t = \int_0^1 p_t(i)di \equiv E_i[p_t(i)]$ průřezový průměr (logaritmu) cen. Taylorova aproximace druhého řádu (43) okolo $p_t(i) = p_t$ je

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\epsilon}{1-\alpha}} di &= \int_0^1 e^{-\frac{\epsilon}{1-\alpha}p_t(i)} e^{\frac{\epsilon}{1-\alpha}p_t} di = \int_0^1 e^{-\frac{\epsilon}{1-\alpha}(p_t(i)-p_t)} di \\
&\simeq \int_0^1 \left[1 - \frac{\epsilon}{1-\alpha}(p_t(i)-p_t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{1-\alpha}\right)^2 (p_t(i)-p_t)^2\right] di \\
&= 1 - \frac{\epsilon}{1-\alpha}\int_0^1 (p_t(i)-p_t)di + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{1-\alpha}\right)^2 \int_0^1 (p_t(i)-p_t)^2 di \\
&= 1 + \frac{\epsilon}{1-\alpha}p_t - \frac{\epsilon}{1-\alpha}\int_0^1 p_t(i)di + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{1-\alpha}\right)^2 \int_0^1 (p_t(i)-p_t)^2 di
\end{aligned}$$

Nyní dosadíme (46) za p_t

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\epsilon}{1-\alpha}} di &\simeq 1 + \frac{\epsilon}{1-\alpha}\left(\int_0^1 p_t(i)di + \frac{1}{2}(1-\epsilon)\int_0^1 (p_t(i)-p_t)^2 di\right) \\ &\quad - \frac{\epsilon}{1-\alpha}\int_0^1 p_t(i)di + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{1-\alpha}\right)^2\int_0^1 (p_t(i)-p_t)^2 di \\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{1-\alpha}\int_0^1 (p_t(i)-p_t)^2 di\left((1-\epsilon) + \frac{\epsilon}{1-\alpha}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha+\alpha\epsilon}{1-\alpha}\right)\int_0^1 (p_t(i)-p_t)^2 di\end{aligned}$$

Za použití vztahu $p_t = E_i[p_t(i)]$ z rovnice (46) a definice rozptylu $var_i[p_t(i)] \equiv \int_0^1 (p_t(i) - E_i[p_t(i)])^2 di$ můžeme psát

$$\int_0^1 \left(\frac{P_t(i)}{P_t}\right)^{-\frac{\epsilon}{1-\alpha}} di \simeq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon(1-\alpha+\alpha\epsilon)}{(1-\alpha)^2}\right) var_i[p_t(i)] \tag{47}$$

Rovnice (47) tudíž ukazuje, že vztah (43) platí až do aproximace prvního řádu, což jsme chtěli dokázat.

3.2 Mezní náklady

Agregátní reálné celkové náklady můžeme definovat jako celkové mzdové náklady. S použitím (41) (a vynecháním cenové disperse) máme

$$TC^r_{t+k} \equiv N_{t+k}\frac{W_{t+k}}{P_{t+k}} = \left(\frac{Y_{t+k}}{A_{t+k}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{W_{t+k}}{P_{t+k}}$$

Agregátní mezní náklady získáme parciální derivací celkových nákladů dle Y_{t+k}

$$MC^r_{t+k} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{W_{t+k}}{P_{t+k}}\frac{1}{A_{t+k}}\left(\frac{Y_{t+k}}{A_{t+k}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{W_{t+k}}{P_{t+k}}A_{t+k}^{-\frac{1}{1-\alpha}}Y_{t+k}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{48}$$

V kapitole 2.2 jsme si ukázali, že reálné mezní náklady individuální firmy i jsou rovny

$$MC^r_{t+k}(i) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{W_{t+k}}{P_{t+k}}A_{t+k}^{-\frac{1}{1-\alpha}}Y_{t+k|t}(i)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Nyní dosadíme poptávku (29), použijeme podmínku rovnováhy $Y_t = C_t$, a upravíme

$$\begin{aligned}MC^r_{t+k}(i) &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{W_{t+k}}{P_{t+k}}A_{t+k}^{-\frac{1}{1-\alpha}}\left[\left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right)^{-\epsilon} Y_{t+k}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{W_{t+k}}{P_{t+k}}A_{t+k}^{-\frac{1}{1-\alpha}}Y_{t+k}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right)^{\frac{-\epsilon\alpha}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Po dosazení (48) získáme mezi mezními náklady individuální firmy a agregátními mezními náklady

$$MC^r_{t+k}(i) = MC^r_{t+k}\left(\frac{P_t^*}{P_{t+k}}\right)^{\frac{-\epsilon\alpha}{1-\alpha}} \tag{49}$$

Rovnici individuálních mezních nákladů (49) log-linearizujeme pomocí exaktní metody a získáme

$$\widehat{mc}^r_{t+k}(i) = \widehat{mc}^r_{t+k} - \frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t+k})$$

$$\widehat{mc}^r_{t+k}(i) = \widehat{mc}^r_{t+k} - \frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1}) + \frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}(\hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1}) \tag{50}$$

3.3 Nová Keynesiánská Phillipsova křivka

Do rovnice (37) popisující volbu optimální ceny individuální firmou nyní dosadíme mezní náklady (50) a upravíme za použití pravidla pro nekonečné sumy $\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k = \frac{1}{1-\beta\theta}$

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1} &= (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\widehat{mc}_{t+k}^r - \frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}(\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1}) + \left[1+\frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}\right](\hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1})\right\} \\
\left[1+\frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}\right](\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1}) &= (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\widehat{mc}_{t+k}^r + \left[1+\frac{\epsilon\alpha}{1-\alpha}\right](\hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1})\right\} \\
\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1} &= (1-\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\Theta\widehat{mc}_{t+k}^r + \hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1}\right\} \qquad (51)
\end{aligned}
$$

kde $\Theta \equiv \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\epsilon\alpha}$.

V dalším kroku se několika úpravami zbavíme nekonečné sumy a rovnici (51) přepíšeme do rekurzivního tvaru. Začneme tím, že rozdělíme nekonečnou sumu na dva členy

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1} =& (1-\beta\theta)[\Theta\widehat{mc}_t^r + \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}] \\
&+ (1-\beta\theta)\sum_{k=1}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\Theta\widehat{mc}_{t+k}^r + \hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1}\right\} \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Jelikož platí

$$
\begin{aligned}
&(1-\beta\theta)\sum_{k=1}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\Theta\widehat{mc}_{t+k}^r + \hat{p}_{t+k} - \hat{p}_{t-1}\right\} \\
&\qquad = (1-\beta\theta)(\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\Theta\widehat{mc}_{t+1+k}^r + \hat{p}_{t+1+k} - \hat{p}_{t-1}\right\}
\end{aligned}
$$

můžeme (52) přepsat do následujícího tvaru (a odečíst a přičíst $\hat{p}_t$ v nekonečné sumě)

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1} =& (1-\beta\theta)[\Theta\widehat{mc}_t^r + \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}] \\
&+ (1-\beta\theta)(\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\Theta\widehat{mc}_{t+1+k}^r + \hat{p}_{t+1+k} - \hat{p}_t\right\} \\
&+ (1-\beta\theta)(\beta\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(\beta\theta)^k E_t\left\{\hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}\right\}
\end{aligned}
$$

Nyní využijeme definice inflace $\hat{\pi}_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$, na základě rovnice (51) si uvědomíme, že výraz na druhém řádku odpovídá $(\beta\theta)(E_t\hat{p}_{t+1}^* - \hat{p}_t)$, a na výraz na třetím řádku aplikujeme vzorec na nekonečnou sumu

$$
\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1} = (1-\beta\theta)(\Theta\widehat{mc}_t^r + \hat{\pi}_t) + (\beta\theta)(E_t\hat{p}_{t+1}^* - \hat{p}_t) + (\beta\theta)\hat{\pi}_t
$$

A na závěr už jen dosadíme (27) za $\hat{p}_t^* - \hat{p}_{t-1}$ a $E_t\hat{p}_{t+1}^* - \hat{p}_t$ a upravíme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\theta}\hat{\pi}_t &= (1-\beta\theta)\Theta\widehat{mc}_t^r + \frac{\beta\theta}{1-\theta}E_t\hat{\pi}_{t+1} + \hat{\pi}_t \\
\hat{\pi}_t &= \lambda\widehat{mc}_t^r + \beta E_t\hat{\pi}_{t+1} \qquad (53)
\end{aligned}
$$

kde $\lambda \equiv \frac{(1-\beta\theta)(1-\theta)}{\theta}\Theta$. Rovnice (53) je již téměř hotová Nová Keynesianská Phillipsova křivka vyjadřující závislost inflace na očekáváné inflaci a reálných mezních nákladech. V posledním kroku bychom rádi do Nové

Keynesianské Phillipsovy křivky rádi místo mezních nákladů dostali produkční mezeru $\tilde{y}_t \equiv \log Y_t - \log Y_t^*$, kde Y_t^* je tzv. přirozený produkt, který by byl produkován při flexibilních cenách.

Rovnice (48) nám říká, že agregátní reálné mezní náklady jsou

$$MC_t^r = \frac{1}{1-\alpha}\frac{W_t}{P_t}A_t^{-\frac{1}{1-\alpha}}Y_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Dáme využijeme rovnici nabídky práce domácnosti (19) společně s podmínkou rovnováhy $Y_t = C_t$

$$\frac{W_t}{P_t} = Y_t^{\sigma}N_t^{\varphi}$$

Dále použijeme vztah mezi produktem a zaměstnaností (41)

$$N_t = \left(\frac{Y_t}{A_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Kombinací těchto tří rovnic dostaneme

$$MC_t^r = \frac{1}{1-\alpha}Y_t^{\sigma}\left(\frac{Y_t}{A_t}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}A_t^{-\frac{1}{1-\alpha}}Y_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}Y_t^{\sigma+\frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}}A_t^{-\frac{1+\varphi}{1-\alpha}}$$

Log-linearizace exaktní metodou nám dá

$$\widehat{mc}_t^r = \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)\hat{y}_t - \left(\frac{1+\varphi}{1-\alpha}\right)\hat{a}_t \tag{54}$$

Mezní náklady pro ekonomiku s flexibilními cenami jsou v log-lineární formě dány jako

$$\widehat{mc}_t^{r*} = \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)\hat{y}_t^* - \left(\frac{1+\varphi}{1-\alpha}\right)\hat{a}_t = 0 \tag{55}$$

Jelikož jak uvádí Galí (2015, s. 62), mezní náklady v cenově flexibilní ekonomice jsou vždy konstanta a tedy $\widehat{mc}_t^{r*} = 0$, odečtením (54) od (55) dostaneme

$$\widehat{mc}_t^r = \left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)\tilde{y}_t \tag{56}$$

Dosazením (56) do (53) získáme Novou Keynesiánskou Phillipsovu křivku

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t\hat{\pi}_{t+1} + \kappa\tilde{y}_t \tag{57}$$

kde $\kappa \equiv \lambda\left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)$, $\lambda = \frac{(1-\beta\theta)(1-\theta)}{\theta}\Theta$ a $\Theta = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\epsilon\alpha}$.

3.4 Dynamická IS křivka

Nyní se pokusíme přepsat Eulerovu rovnici (40) tak, aby také závisela na produkční mezeře $\tilde{y}_t$ a nikoliv na produktu $\hat{y}_t$. Rovnici (55) proto přepíšeme jako

$$\hat{y}_t^* = \left(\frac{1+\varphi}{(1-\alpha)\sigma+\varphi+\alpha}\right)\hat{a}_t \tag{58}$$

A k Eulerově rovnici (40) přičteme a odečteme $\hat{y}_t^*$ a $E_t\hat{y}_{t+1}^*$

$$\hat{y}_t - \hat{y}_t^* = E_t\hat{y}_{t+1} - E_t\hat{y}_{t+1}^* - \frac{1}{\sigma}(\hat{\imath}_t - E_t\hat{\pi}_{t+1} - \sigma[E_t\hat{y}_{t+1}^* - \hat{y}_t^*]) + \frac{1}{\sigma}(\hat{z}_t - E_t\hat{z}_{t+1})$$

použijeme definici $\tilde{y}_t$ a dostaneme dynamickou IS křivku

$$\tilde{y}_t = E_t\tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(\hat{i}_t - E_t\hat{\pi}_{t+1} - \sigma\left[E_t\hat{y}^*_{t+1} - \hat{y}^*_t\right]\right) + \frac{1}{\sigma}\left(\hat{z}_t - E_t\hat{z}_{t+1}\right) \tag{59}$$

kde z rovnice (58) máme

$$\left[E_t\hat{y}^*_{t+1} - \hat{y}^*_t\right] = \left(\frac{1+\varphi}{(1-\alpha)\sigma + \varphi + \alpha}\right)\left[E_t\hat{a}_{t+1} - \hat{a}_t\right]$$

Dynamickou IS křivku (59) případně můžeme přepsat do tvaru, který uvádí Galí (2015, s. 23)

$$\tilde{y}_t = E_t\tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\hat{\pi}_{t+1} - r^n_t\right) \tag{60}$$

a

$$r^n_t = \rho - \sigma(1-\rho_a)\left(\frac{1+\varphi}{(1-\alpha)\sigma + \varphi + \alpha}\right)\hat{a}_t + (1-\rho_z)\hat{z}_t$$

kde r^n_t je přirozená úroková míra.

3.5 Taylorovo pravidlo

Model uzavřeme pomocí následujícího jednoduchého pravidla, které aproximuje reakci centrální banky na vývoj produkční mezery a inflace

$$\hat{i}_t = \phi_\pi\hat{\pi}_t + \phi_{\tilde{y}}\tilde{y}_t + \upsilon_t \tag{61}$$

kde ϕ_π a $\phi_{\tilde{y}}$ jsou reakční parametry, a υ_t je i.i.d. monetární šok.

4 Základní Nový Keynesiánský model

V tomto textu jsme si odvodili základní Nový Keynesiánský model, který se skládá ze tří hlavních rovnic:

Nové Keynesiánské Phillipsovy křivky

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t\hat{\pi}_{t+1} + \kappa\tilde{y}_t$$

kde $\kappa \equiv \lambda\left(\sigma + \frac{\varphi+\alpha}{1-\alpha}\right)$, $\lambda = \frac{(1-\beta\theta)(1-\theta)}{\theta}\Theta$ a $\Theta = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\epsilon\alpha}$.

Dynamické IS křivky

$$\tilde{y}_t = E_t\tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(\hat{i}_t - E_t\hat{\pi}_{t+1} - \sigma\left[E_t\hat{y}^*_{t+1} - \hat{y}^*_t\right]\right) + \frac{1}{\sigma}\left(\hat{z}_t - E_t\hat{z}_{t+1}\right)$$

Taylorova pravidla

$$\hat{i}_t = \phi_\pi\hat{\pi}_t + \phi_{\tilde{y}}\tilde{y}_t + \upsilon_t$$

a tří rovnic pro **exogenní proměnné**

$$\hat{z}_t = \rho_z\hat{z}_{t-1} + \varepsilon^z_t$$
$$\hat{a}_t = \rho_a\hat{a}_{t-1} + \varepsilon^a_t$$
$$\left[E_t\hat{y}^*_{t+1} - \hat{y}^*_t\right] = \left(\frac{1+\varphi}{(1-\alpha)\sigma + \varphi + \alpha}\right)\left[E_t\hat{a}_{t+1} - \hat{a}_t\right]$$

Tento systém šesti rovnic obsahuje soubor zakladni_NK.mod

Reference

CALVO, Guillermo A. (1983). Staggered prices in a utility-maximizing framework. *Journal of Monetary Economics*, Vol. 12, No. 3, pp. 383-398.

GALÍ, Jordi (1999). Technology, Employment, and the Business Cycle: Do Technology Shocks Explain Aggregate Fluctuations? *American Economic Review*, Vol. 89, No. 1 pp. 249-271.

GALÍ, Jordi (2015). *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle*. An Introduction to the New Keynesian Framework and Its Applications. Second Edition. Princeton: Princeton University Press. ISBN: 9780691164786.

YUN, Tack (1996). Nominal price rigidity, money supply endogeneity, and business cycles. *Journal of monetary Economics*, Vol. 37, No. 2, pp. 345-370.