Druhé cvičení
Posloupnosti a řady

Příklad 1: Napište první pět členů daných posloupností:

a) $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$,   b) $a_n = (0{,}2)^n$,

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$,   d) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3$.

Je některá z uvedených poslupností aritmetická nebo geometrická?

Příklad 2: Najděte vzorec pro n-tý člen daných posloupností (předpokládejte, že vzor prvních členů pokračuje):

a) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$,   b) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$,

c) $\{2, 7, 12, 17, \dots\}$,   d) $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \dots\right\}$.

Která z daných poslupností je aritmetická nebo geometrická?

Příklad 3: Určete součet prvních deseti členů následujících posloupností:

a) $a_n = 3 + 2n$,   b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,

c) $a_n = 3^n$,   d) $a_n = -3n$.

Příklad 4: Uložíme-li částku 75 000 Kč při úroku 5 % ročně, jak velkou částku můžeme očekávat na účtu za 5 let? Za jak dlouho se daná částka zdvojnásobí?

Příklad 5: Jak velkou částku musíme investovat, abychom za 5 let získali €10 000, je-li roční úroková míra 5 %? A kolik let bude trvat při dané úrokové míre než se investice €1 000 zhodnotí na €2 000?

Příklad 6: Autor učebnice si může nechat vyplatit tantiémy dvěma různými způsoby. Buď dostane 21 000 Kč ihned a nebo dostane 4 600 Kč v pěti ročních splátkách, přičemž první dostane okamžitě. Která nabídka je výhodnější, je-li roční úroková míra 6 %?

Příklad 7: Vypočítejte, případně rozepište následující sumy:

a) $\sum_{i=1}^{5} i^2$,   b) $\sum_{n=1}^{10} 2$,

c) $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$,   d) $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$,

e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$,   f) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b^k$.

Příklad 8: Schengenský prostor je území 27 států, ve kterém mohou osoby překračovat hranice sdružených států bez hraniční kontroly. Pro rok 2024 označme c_{ij} odhad množství osob, které přejdou hranice z území státu i na území státu j pro každé $i \neq j$. Jaký je význam výrazů $\sum_{j=1}^{27} c_{ij}$ a $\sum_{i=1}^{27} c_{ij}$?

Příklad 9: Určete součet následujících řad (pokud je to možné):

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$,   b) $\sum_{k=1}^{\infty} (1{,}25)^k$,

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (0{,}1)^k$,   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3^n - 2^n}{6^n}$

PŘÍKLAD 10: Vláda se rozhodne dát fixní slevu na daních každé domácnosti, přičemž statistici usuzují, že část této slevy se utratí za služby a zboží. Příjemci těchto peněz opět utratí stejnou část této částky za služby a zboží atd. Je pro celkovou velikost ekonomiky výhodnější, když vláda poskytne slevu ve výši 10 000 Kč a a příjemci utratí 80 % nebo když bude sleva 5 000 Kč, ale příjemci utratí 90 %?

PŘÍKLAD 11: Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nápověda: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

PŘÍKLAD 12: Ukažte, že dané řady divergují:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$.

PŘÍKLAD 13: Co je špatně na následující úvaze?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 14: Rozepište následující sumy a vypočtěte:

a) $\sum_{s=1}^{3} \sum_{r=1}^{4} (r+2s)$,

b) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} i \cdot 3^j$.