MUNI ECON

Druhé cvičení
Posloupnosti a řady
Výsledky (bez záruky)

Příklad 1:

a) $1;\ \frac{3}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{11};\ \frac{3}{7}$,

b) 0,2; 0,04; 0,008; 0,0016; 0,00032, geometrická,

c) $-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{6};\ \frac{1}{24};\ -\frac{1}{120}$,

d) 1; 4; 7; 10; 13, aritmetická.

Příklad 2:

a) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, geometrická,

b) $a_n = \frac{1}{2n}$,

c) $a_n = -3 + 5n$, aritmetická,

d) $a_n = \left(-\frac{2}{2}\right)^{n-1}$, geometrická.

Příklad 3:

a) $a_1 = 5$, $a_{10} = 23$, $s_{10} = 5(5+23) = 140$,

b) $s_{10} = -\frac{1}{2}\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{341}{1024}$,

c) $s_{10} = 3\frac{1-3^{10}}{1-3} = 88572$,

d) $a_1 = -3$, $a_{10} = -30$, $s_{10} = 5(-3-30) = -165$.

Příklad 4: $P_5 = P_0(1+i)^5 = 75\,000 \cdot (1{,}05)^5 = 95\,721{,}1\,\text{Kč}$
$2P_0 = P_0(1,05)^n \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} = 14{,}2$, prakticky po 15 letech.

Příklad 5: $P_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n} = \frac{10\,000}{(1{,}05)^5} = 7\,835{,}26$ Kč, vlastně stejný úkol, tj. prakticky po 15 letech.

Příklad 6: $PV = 4\,600 + \frac{4\,600}{1{,}06} + \frac{4\,600}{(1{,}06)^2} + \frac{4\,600}{(1{,}06)^3} + \frac{4\,600}{(1{,}06)^4} = 20\,539{,}5$ Kč. Je tedy výhodnější si nechat vyplatit rovnou 21 000 Kč.

Příklad 7: Vypočítejte, případně rozepište následující sumy:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$,

b) $2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 20$,

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$,

d) $\frac{1}{N}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N)$,

e) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$,

f) $a_{1i}b + a_{2i}b^2 + a_{3i}b^3 + \cdots + a_{ni}b^n$.

Příklad 9:

a) $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$,

b) diverguje,

c) $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}1}{1-0{,}1} = \frac{1}{9}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3^n - 2^n}{6^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{6}\right) = 2\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Příklad 10: V obou variantách jde o nekonečnou geometrickou řadu

$$S_1 = \frac{10\,000}{1-0{,}8} = 50\,000\,\text{Kč}.$$

$$S_2 = \frac{5\,000}{1-0{,}9} = 50\,000\,\text{Kč}.$$

V obou variantách je tedy přínos stejný.

Příklad 11:

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Příklad 12: Ve všech případech není splněná nutná podmínka konvergence.

a) $\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right] = \infty > 0$,

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1 > 0$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-3} = \frac{1}{2} > 0$.

Příklad 14:

a)

$$\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{4}(r+2s) = \sum_{s=1}^{3}[(1+2s)+(2+2s)+(3+2s)+(4+2s)] =$$
$$= \sum_{s=1}^{3}(8s+10) = 18+26+34 = 78.$$

b)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} i\cdot 3^j = \sum_{i=1}^{3}(3i+9i+27i+81i) = \sum_{i=1}^{3} = 120i$$
$$=120+240+360 = 720.$$