Jak popsat změnu

Derivace a její použití

Petr Liška

Masarykova univerzita

6.3.2024

Derivace a její interpretace

Definice derivace - mezní „cokoliv“ (marginal „whatever“)

Definice derivace - mezní „cokoliv“ (marginal „whatever“)

$$TC = f(Q), \quad \text{kde}\, Q \,\text{značí množství}$$

Definice derivace - mezní „cokoliv“ (marginal „whatever“)

$$TC = f(Q), \quad \text{kde } Q \text{ značí množství}$$

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = \frac{TC_2 - TC_1}{Q_2 - Q_1}$$

Definice derivace - mezní „cokoliv“ (marginal „whatever“)

$$TC = f(Q), \quad \text{kde}\, Q \,\text{značí množství}$$

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = \frac{TC_2 - TC_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$MC = \frac{\mathrm{d}TC}{\mathrm{d}Q}$$

Definice derivace - mezní „cokoliv“ (marginal „whatever“)

$$TC = f(Q), \quad \text{kde}\, Q\, \text{značí množství}$$

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q} = \frac{TC_2 - TC_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$MC = \frac{\mathrm{d}TC}{\mathrm{d}Q}$$

Příklad

Nechť funkce $C(x)$ popisuje náklady na snížení emisí CO_2 v atmosféře o x procent v miliardách dolarů. Jaký je význam $C'(x)$ a jaký je význam čísla $C'(20) = 50$?

Příklad

Jsou-li celkové úspory v zemi dány funkcí $S(Y)$, kde Y je národní produkt, potom $S'(Y)$ je tzv. mezní sklon ke spoření (marginal propensity to save, MPS). Jaký je jeho význam? Je-li

$$S(Y) = \bar{S} + sY,$$

jaký je $S'(Y)$?

Příklad

Jsou-li celkové úspory v zemi dány funkcí $S(Y)$, kde Y je národní produkt, potom $S'(Y)$ je tzv. mezní sklon ke spoření (marginal propensity to save, MPS). Jaký je jeho význam? Je-li

$$S(Y) = \bar{S} + sY,$$

jaký je $S'(Y)$?

Elasticita

Má-li f derivaci a $f \neq 0$, potom *elasticita* f vzhledem k x je

$$\mathrm{El}_x f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x)\,.$$

Keynesianský multiplikátor

Jednoduchý makroekonomický model bez veřejných výdajů a zahraničního obchodu je dán vztahy

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= a + bY, \qquad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

kde Y je národní důchod, C spotřeba a I investice. Jak musíme zvýšit investice, abychom dostali předem dané zvýšení národního důchodu?

Keynesianský multiplikátor

Jednoduchý makroekonomický model bez veřejných výdajů a zahraničního obchodu je dán vztahy

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= a + bY, \qquad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

kde Y je národní důchod, C spotřeba a I investice. Jak musíme zvýšit investice, abychom dostali předem dané zvýšení národního důchodu?

Řešení:

$$Y = a + bY + I \qquad \Longrightarrow \qquad Y = \frac{a + I}{1 - b}\,.$$

Keynesianský multiplikátor

Jednoduchý makroekonomický model bez veřejných výdajů a zahraničního obchodu je dán vztahy

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= a + bY, \qquad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

kde Y je národní důchod, C spotřeba a I investice. Jak musíme zvýšit investice, abychom dostali předem dané zvýšení národního důchodu?

Řešení:

$$Y = a + bY + I \qquad \Longrightarrow \qquad Y = \frac{a+I}{1-b}\,.$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1-b}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Uvažujme například, že $a = 0$, $b = 0{,}75$ a $I = 250$. Jak musíme zvýšit investice, aby se národní důchod zvýšil o 200?

$$200 = \frac{1}{1-0{,}75}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 50.$$

...rate of increase of inflation is decreasing.

Nixon, 1972

Derivace a extrémy funkce

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

a) *lokální maximum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,

b) *lokální minimum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,

c) *ostré lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,

d) *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

a) *lokální maximum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,

b) *lokální minimum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,

c) *ostré lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,

d) *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Věta (Fermatova)

Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.

Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce.

Věta

Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, pak v něm funkce má lokální extrém.

Věta

Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, pak v něm funkce má lokální extrém.

Definice

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme *n-tou derivaci* (*derivaci n-tého řádu*) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Věta

Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, pak v něm funkce má lokální extrém.

Definice

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme *n-tou derivaci* (*derivaci n-tého řádu*) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$, tj. x_0 je stacionární bod.

a) Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

b) Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Příklad

Určete lokální extrémy funkce

$$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

Příklad

Určete lokální extrémy funkce

$$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

Řešení:

$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x\,.$$

$$y' = 0 \iff 4x(x-1)(x-2) = 0\,.$$

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Lokální maximum v bodě $[1, 1]$ a lokální minima v bodech $[0, 0]$ a $[2, 2]$.

Definice

Buď funkce f definovaná na množině M. Jestliže $x_0 \in M$ a platí

$$f(x) \leq f(x_0)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M *absolutní maximum* v bodě x_0. Podobně definujeme *absolutní minimum*.

Definice

Buď funkce f definovaná na množině M. Jestliže $x_0 \in M$ a platí

$$f(x) \leq f(x_0)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M *absolutní maximum* v bodě x_0. Podobně definujeme *absolutní minimum*.

Postup pro nalezení absolutních extrémů:

1. Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace.
2. Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
3. Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
4. Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude absolutní maximum a minimum.

Příklad

Najděte absolutní extrémy funkce:

$$f(x) = x - x^2, \qquad x \in [0, 1]$$

Příklad

Najděte absolutní extrémy funkce:

$$f(x) = x - x^2, \qquad x \in [0, 1]$$

Řešení: $f'(x) = 1 - 2x$, $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.

Příklad

Najděte absolutní extrémy funkce:

$$f(x) = x - x^2, \qquad x \in [0, 1]$$

Řešení: $f'(x) = 1 - 2x$, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Příklad

Najděte absolutní extrémy funkce:

$$f(x) = x - x^2, \qquad x \in [0, 1]$$

Řešení: $f'(x) = 1 - 2x$, $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.
$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
Funkce má jedno absolutní maximum $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$ a dvě absolutní minima $[0, 0]$ a $[1, 1]$.

Příklad

Najděte absolutní extrémy funkce:

$$f(x) = x - x^2, \qquad x \in [0, 1]$$

Řešení: $f'(x) = 1 - 2x$, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
Funkce má jedno absolutní maximum $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$ a dvě absolutní minima $[0, 0]$ a $[1, 1]$.

Příklad

Farma může prodat 20 beden úrody týdně při ceně 400 Kč. Majitel odhaduje, že při snížení ceny o 10 Kč prodá o dvě bedny více. Výrobní náklady jsou 200 Kč na jednu bednu. Jaká je optimální cena bedny úrody pro maximalizaci zisku a jak velký tento zisk bude?

Optimální zdanění

Zvětšení zdanění zboží zvýší jeho cenu. To má za následek snížení poptávky (celkový efekt změny bude záviset na elasticitě poptávky). Toho, kdo daně vybírá, ovšem nejvíce zajímá, kolik daní vybere. Otázkou tedy je, zda-li snížení poptávky nepřeváží zvýšení daní, tj. sníží se celkový daňový výnos. Uvažujme, že poptávka se řídí vztahem

$$p_d = a + bq$$

a nabídka vztahem

$$p_s = c + dq,$$

kde p_d a p_s jsou jednotkové ceny v korunách, q značí množství a a, c, $d>0$ a $b<0$. Jak bude vypadat optimální daň?

Řešení: Označíme-li t daň uvalenou na jeden kus zboží, pak nabídka se bude řídit vztahem

$$p_s = c + dq + t\,.$$

Řešení: Označíme-li t daň uvalenou na jeden kus zboží, pak nabídka se bude řídit vztahem

$$p_s = c + dq + t\,.$$

Při rovnováze na trhu platí:

$$p_d = p_s \quad \Longrightarrow \quad c + dq + t = a + bq$$

Řešení: Označíme-li t daň uvalenou na jeden kus zboží, pak nabídka se bude řídit vztahem

$$p_s = c + dq + t\,.$$

Při rovnováze na trhu platí:

$$p_d = p_s \quad \Longrightarrow \quad c + dq + t = a + bq$$

$$q = \frac{a - c - t}{d - b}\,.$$

Řešení: Označíme-li t daň uvalenou na jeden kus zboží, pak nabídka se bude řídit vztahem

$$p_s = c + dq + t\,.$$

Při rovnováze na trhu platí:

$$p_d = p_s \quad \Longrightarrow \quad c + dq + t = a + bq$$

$$q = \frac{a - c - t}{d - b}\,.$$

Celkový daňový výnos y je určen množstvím prodaného zboží a daně, tj.

$$y = qt = \frac{a - c - t}{d - b} t.$$

Řešení: Označíme-li t daň uvalenou na jeden kus zboží, pak nabídka se bude řídit vztahem

$$p_s = c + dq + t\,.$$

Při rovnováze na trhu platí:

$$p_d = p_s \quad\Longrightarrow\quad c + dq + t = a + bq$$

$$q = \frac{a - c - t}{d - b}\,.$$

Celkový daňový výnos y je určen množstvím prodaného zboží a daně, tj.

$$y = qt = \frac{a - c - t}{d - b}t.$$

$$y' = \frac{a - c - 2t}{d - b}.$$

$$y' = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{a - c}{2}$$

Řešení: Označíme-li t daň uvalenou na jeden kus zboží, pak nabídka se bude řídit vztahem

$$p_s = c + dq + t\,.$$

Při rovnováze na trhu platí:

$$p_d = p_s \quad \Longrightarrow \quad c + dq + t = a + bq$$

$$q = \frac{a - c - t}{d - b}\,.$$

Celkový daňový výnos y je určen množstvím prodaného zboží a daně, tj.

$$y = qt = \frac{a - c - t}{d - b} t.$$

$$y' = \frac{a - c - 2t}{d - b}.$$

$$y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{a - c}{2}$$

$$y'' = \frac{-2}{d - b} < 0$$

Jak derivace ovlivňuje tvar grafu?

Konvexní a konkávní funkce

Konvexní a konkávní funkce

Definice

Leží-li graf funkce f nad každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

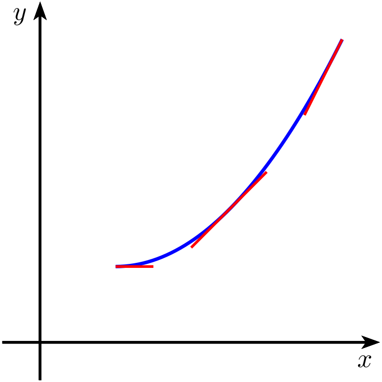
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konvexní* na intervalu I.

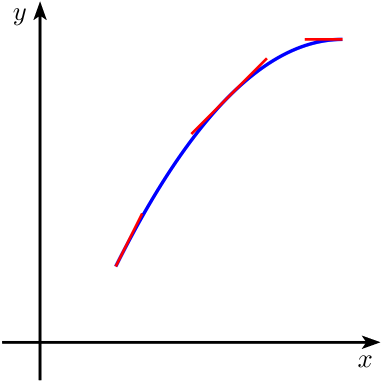
Leží-li graf funkce f pod každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konkávní* na intervalu I.



konvexní = nad tečnou



konkávní = pod tečnou

Věta

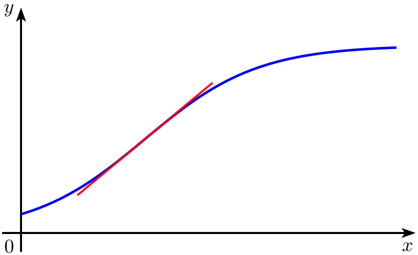
Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I.

a) *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I.*

b) *Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I.*

Definice

Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže je f v x_0 spojitá, a jestliže je vlevo od bodu x_0 konkávní a vpravo od tohoto bodu je konvexní, nebo naopak.



Věta

a) *Nechť* x_0 *je inflexní bod a nechť existuje* $f''(x_0)$*. Pak* $f''(x_0) = 0$*.*

b) *Nechť* $f''(x_0) = 0$*, v levém okolí bodu* x_0 *platí* $f''(x) < 0$ *a v pravém okolí bodu* x_0 *platí* $f''(x) > 0$*, nebo naopak. Pak má funkce* f *v bodě* x_0 *inflexní bod.*

Věta

a) *Nechť* x_0 *je inflexní bod a nechť existuje* $f''(x_0)$*. Pak* $f''(x_0) = 0$.

b) *Nechť* $f''(x_0) = 0$*, v levém okolí bodu* x_0 *platí* $f''(x) < 0$ *a v pravém okolí bodu* x_0 *platí* $f''(x) > 0$*, nebo naopak. Pak má funkce* f *v bodě* x_0 *inflexní bod.*

Příklad

Určete intervaly, ve kterých je funkce

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

konvexní/konkávní, případně určete její inflexní body.

Užitečný nástroj - L'Hospitalovo pravidlo

Věta

Buď $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta

Buď $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$,

ii) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Využitím různých triků se na tyto dva případy dají převést i ostatní tzv. *neurčité výrazy*

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty.$$