

TŘETÍ CVIČENÍ
LIMITY A DERIVACE

PŘÍKLAD 1: Ze znalosti grafu nebo pomocí úvah určete limity:

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x),$ | b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x,$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3},$ | d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3},$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2},$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+e^{-x}}.$ |

PŘÍKLAD 2: Určete limity

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x+4}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x+4}, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{2x+4}, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{2x+4}.$$

Co na základě těchto hodnot můžeme říci o grafu funkce $f: y = \frac{1}{2x+4}$?

PŘÍKLAD 3: Určete limity

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-e^x}.$$

Co na základě těchto hodnot můžeme říci o grafu funkce $f: y = \frac{1}{1-e^x}$?

PŘÍKLAD 4: Vypočítejte limity

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3-2x+1}{4x^3+x^2+1},$ | b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+2x-3}{x^3-x^2+x},$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4-3x^3+1}{2x^2+x+1},$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5},$ |

PŘÍKLAD 5: Vypočítejte derivace následujících funkcí (proměnná je vždy x , $a > 0$, $b > 0$)

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $y = x^5 - x + 2,$ | b) $y = x^2 + \frac{1}{x^2},$ |
| c) $y = ax + b,$ | d) $y = x\sqrt[3]{x} - x(x^2 + 1),$ |
| e) $y = x^4 e^x,$ | f) $y = x \ln x,$ |
| g) $y = 3x^2 \sin x,$ | h) $y = \frac{x^2+1}{x-1},$ |
| i) $y = \frac{2x}{x^2+2},$ | j) $y = \frac{ax}{x+b},$ |
| k) $y = \frac{x^2}{e^x},$ | l) $y = e^{3x},$ |
| m) $y = \ln(e^x + e^{-x}),$ | n) $y = (x^a + b)^3,$ |
| o) $y = e^x \ln(x^2 + 1),$ | p) $y = \ln \frac{1-x}{1+x},$ |
| q) $y = \ln(1 + \sqrt{1 + e^{-x}}),$ | r) $y = (1 + 2(ax^2 + b)^3)^4.$ |

PŘÍKLAD 5: Vypočtěte druhou derivaci funkcí

a) $y = x^5 + 4x^3 + 2x^2$,

b) $y = x^3 + \frac{1}{x^3}$,

c) $y = xe^{-x}$,

d) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

PŘÍKLAD 6: Uvažte funkci $\pi(Q) = QP(Q) - cQ$, kde P je diferencovatelná funkce. Vypočtěte $\frac{d\pi}{dQ}$.

PŘÍKLAD 7: Uvažme tzv. nákladovou funkci

$$C(x) = 8\sqrt[4]{x^3} + 300,$$

která vyjadřuje náklady na produkci x výrobků v stovkách korun. Spočtěte derivaci $C'(x)$ a interpretujte tento výsledek.

PŘÍKLAD 8: Roční zisk firmy x let od dnešního dne se předpokládá ve výši

$$P(x) = 5x - 0,4x^2$$

milionů korun ($0 \leq x \leq 8$). Vypočtěte $P(3)$, $P'(3)$ a $P''(3)$ a interpretujte tyto výsledky.