

TŘETÍ CVIČENÍ
LIMITY A DERIVACE
VÝSLEDKY (BEZ ZÁRUKY)

PŘÍKLAD 1: Ze znalosti grafu nebo pomocí úvah určete limity:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ neexistuje,
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$, neexistuje (zprava a zleva není stejná)
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+e^{-x}} = 4$.

PŘÍKLAD 4: Vypočítejte limity

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{4x^3 + x^2 + 1} = \frac{3}{4}$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 + x} = 0$,
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^4 - 3x^3 + 1}{2x^2 + x + 1} = +\infty$, d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

PŘÍKLAD 5: Vypočítejte derivace následujících funkcí (proměnná je vždy x , $a > 0$, $b > 0$)

- a) $y' = 5x^4 - 1$, b) $y' = 2x - \frac{2}{x^3}$,
c) $y' = a$, d) $y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - 3x^2 - 1$,
e) $y' = (x^4 + 4x^3)e^x$, f) $y' = \ln x + 1$,
g) $y' = 6x \sin x + 3x^2 \cos x$, h) $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$,
i) $y' = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$, j) $y' = \frac{ab}{(x+b)^2}$,
k) $y' = \frac{2x-x^2}{e^x}$, l) $y' = 3e^{3x}$,
m) $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, n) $y' = 3ax^{a-1}(x^a + b)^2$,
o) $y' = e^x \ln(x^2 + 1) + \frac{2xe^x}{x^2 + 1}$, p) $y' = \frac{-2}{1-x^2}$,
q) $y' = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}(1+\sqrt{1+e^{-x}})}$, r) $y' = 48ax(1 + 2(ax^2 + b)^3)(ax^2 + b)^2$.

PŘÍKLAD 6: Vypočítejte druhou derivaci funkcí

- a) $y' = 5x^4 + 12x^2 + 4x$, $y'' = 20x^3 + 24x + 4$, b) $y' = 3x^2 - 3x^{-4}$, $y'' = 6x + 12x^{-5}$,
c) $y' = (1-x)e^{-x}$, $y'' = (x-2)e^{-x}$ d) $y' = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$, $y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$.

PŘÍKLAD 7: $\frac{d\pi}{dQ} = P(Q) + QP'(Q) - c$.

PŘÍKLAD 8: $C'(x) = \frac{6}{\sqrt[4]{x}}$. Jedná se o změnu nákladů při změně počtu výrobků (ekonomicky se jedná o tzv. mezní náklady). Můžeme například říct, že číslo $C'(16) = 3$ značí změnu nákladů při produkci šestnáctého výrobku, tedy cenu sedmnáctého výrobku.

PŘÍKLAD 9: $P'(x) = 5 - 0,8x$, $P''(x) = -0,8$.

$P(3) = 11,4$ mil, $P'(3) = 2,6$ mil/rok, $P''(3) = -0,8$ mil/rok².

Třetí rok ode dneška bude tedy zisk firmy 11,4 miliónu. Dá se očekávat, že tento zisk poroste (tj. v dalším roce bude zisk větší), ale růst zisku zpomaluje.