Jak popsat změnu

Funkce více proměnných

Petr Liška

Masarykova univerzita

13.03.2024

Wind-chill index

Typickým příkladem funkce více proměnných, se kterou se setkal každý, je vztah mezi vnímanou a naměřenou teplotou, který je dále ovlivněn rychlostí větru (v případě funkce dvou proměnných) nebo i vlhkostí (funkce tří proměnných).

T/v	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**
5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17
-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

Definice funkce dvou a více proměnných

Definice

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D \neq \emptyset$. Předpis f, který každému bodu roviny $[x, y] \in D$ přiřazuje právě jedno $z \in \mathbb{R}$, nazýváme *funkcí dvou proměnných*. Tuto funkci označujeme

$$z = f(x, y).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f.

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Předpis f, který každému bodu množiny M přiřazuje právě jedno $z \in \mathbb{R}$ se nazývá *(reálná) funkce n (reálných) proměnných*. Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f.

Graf funkce

Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak

$$G(f) = \left\{[x, y, z]; [x, y] \in \mathbb{R}^2; z = f(x, y)\right\}$$

se nazývá *graf funkce* f.

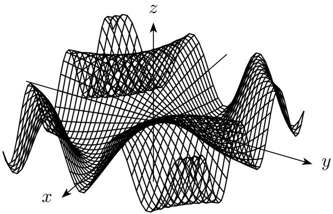
Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

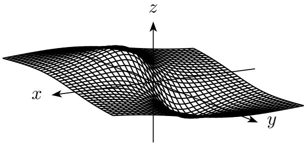
$$f_c = \{[x, y] \in M\colon f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice* funkce f na úrovni c.

$f(x, y) = \sin(xy)$



$f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$



Cobb-Douglasova produkční funkce

Používá se k modelování výstupů firmy nebo státu. Je to například funkce tvaru

$$P(L, K) = aL^\alpha K^\beta, \qquad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1,$$

kde P značí celkovou produkci, L práci (obvykle měřenou v hodinách) a K investovaný kapitál.

Limita a spojitost

Pojem limity funkce dvou proměnných je opět založen na pojmu okolí bodu. Zásadní rozdíl je v tom, jak vypadá okolí bodu na přímce (ose x) a okolí bodu ve vyšší dimenzi. Okolím bodu $[x_0, y_0]$ ležícího v rovině (tj. v dvojrozměrném prostoru) je množina všech bodů $[x, y]$, které mají od tohoto bodu *vzdálenost* menší než nějaké číslo a. Vzdálenost neboli metriku můžeme definovat různými způsoby. Podle výběru metriky dostaneme tvar okolí. Například v euklidovské metrice je okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ vnitřek kruhu se středem $[x_0, y_0]$ a poloměrem a, tj.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < a^2.$$

Ryzím okolím bodu je pak okolí tohoto bodu bez bodu samotného.

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $A \in \mathbb{R}^2$ *limitu* L, $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}(A) \cap \mathcal{D}(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

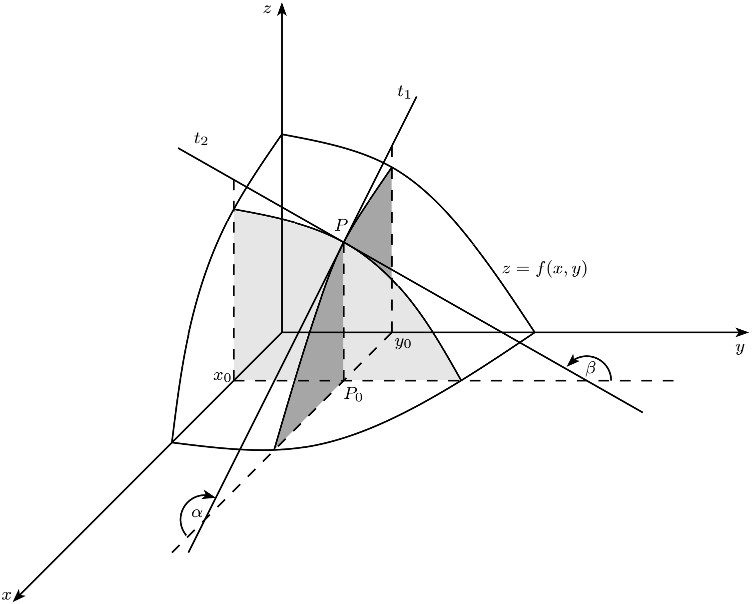
Definice

Nechť bod $[x_0, y_0]$ je takový bod definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, že jeho libovolné ryzí okolí obsahuje bod množiny $\mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je-li spojitá v každém bodě této množiny.

Parciální derivace



Parciální derivace

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $[x_0, y_0]$ je bod. Existuje-li limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ *parciální derivaci* podle x. Tuto derivaci značíme

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$$

Analogicky definujeme a značíme derivaci podle y.

Protože libovolná parciální derivace funkce je definovaná jako „obyčejná“ derivace funkce jedné proměnné, platí pro počítání parciálních derivací obvyklá pravidla pro derivování. Při výpočtu postupujeme tak, že všechny proměnné kromě té, podle které derivujeme, považujeme za konstanty.

Příklad

Vypočtete parciální derivace funkce dvou proměnných:

a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$, b) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$,

c) $f(x,y) = xy\mathrm{e}^y$, d) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

Definice

Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací funkce 2. řádu* podle x funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.
Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Věta (Schwarz, Clairaut)

Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy}, která je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá. Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Příklad

Nalezněte a interpretujte $P_K(200, 120)$ a $P_L(200, 120)$ pro Cobb-Douglasovu funkci

$$P(K, L) = 20K^{0,4}L^{0,6}\,.$$

Řešení:

$$P_K(K, L) = 20 \cdot 0{,}4K^{-0,6}L^{0,6}\,.$$

Dosazením $K = 200$ a $L = 120$ dostaneme

$$P_K(200, 120) = 8 \cdot 200^{-0,6} \cdot 120^{0,6} \approx 5{,}9\,.$$

Toto číslo se nazývá *marginální produktivita kapitálu.*

$$P_L(K, L) = 20 \cdot 0{,}6K^{0,4}L^{-0,4}.$$

Dosazením $K = 200$ a $L = 120$ dostaneme

$$P_L(200, 120) = 12 \cdot 200^{0,4} \cdot 120^{-0,4} \approx 14{,}7$$

Toto číslo se nazývá *marginální produktivita práce.*

Soutěž a koluze

Představme si, že jsme producentem nějakého produktu, jehož nefixní produkční náklady jsou minimální (např. minerální voda, mobilní data atd.), a zároveň máme monopol, tj. jsme jediným producentem. Pro konkrétnost uvažujme, že cena našeho produktu je

$$p = 6 - 0{,}01x, \qquad 0 \le x \le 600,$$

kde x značí množství prodaného produktu. Zisk je potom popsán funkcí

$$R(x) = x(6 - 0{,}01x) = 6x - 0{,}01x^2\,.$$

Náš maximální zisk najdeme položením první derivace nule, tj.

$$R'(x) = 6 - 0{,}02x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 300\,.$$

Že se jedná o maximum, bychom mohli ověřit např. pomocí druhé derivace. Maximální zisk tak bude $R(300) = 900$ Kč při ceně 3 Kč za jednotku.

Co se stane, když budeme mít dalšího konkurenta, tj. půjde již o duopol? Nová cenová funkce bude

$$p = 6 - 0{,}01x - 0{,}01y,$$

kde x značí množství produktu, který prodáme, a y značí množství, které prodá náš konkurent. Náš zisk pak bude

$$R_1(x, y) = px = 6x - 0{,}01x^2 - 0{,}01xy$$

a zisk našeho konkurenta bude

$$R_2(x, y) = py = 6y - 0{,}01xy - 0{,}01y^2\,.$$

Každý z nás se snaží maximalizovat svůj zisk, tj. položíme rovny nule parciální derivace

$$(R_1)_x = 6 - 0{,}02x - 0{,}01y = 0$$

$$(R_2)_y = 6 - 0{,}01x - 0{,}02y = 0$$

Řešením této soustavy rovnic je $x = 200$, $y = 200$. Tedy my i náš konkurent budeme prodávat při ceně $p(200, 200) = 2\,\text{Kč}$ a zisk každého bude $R_1 = R_2 = 400\,\text{Kč}$.

Lokální extrémy

Definice

Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $[x_0, y_0]$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí tohoto bodu takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.
Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ ostré, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech.
(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrně *(ostré) lokální extrémy*.

Definice

Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $[x_0, y_0]$ je *stacionární bod funkce* f, jestliže v bodě $[x_0, y_0]$ existují obě parciální derivace prvního řádu funkce f a platí

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Věta (Fermat)

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém. Pak všechny parciální derivace prvního řádu funkce* f*, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

Věta

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť* $[x_0, y_0]$ *je její stacionární bod. Jestliže*

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

pak má funkce f *v* $[x_0, y_0]$ *ostrý lokální extrém. Je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$*, jde o minimum, je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$*, jde o maximum.*
Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$*, pak v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém nenastává.*

Příklad

Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4\,.$$

Řešení:

$$f_x = 2x + 2xy, \qquad f_y = 2y + x^2\,.$$

$$\begin{aligned} 2x(1+y) &= 0 \\ 2y + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Odtud $S_1 = [0,0]$, $S_2 = [\sqrt{2}, -1]$, $S_3 = [-\sqrt{2}, -1]$.

$$f_{xx} = 2 + 2y, \qquad f_{yy} = 2, \qquad f_{xy} = 2x\,.$$

$$D(x,y) = 2(2+2y) - (2x)^2 = 4 + 4y - 4x^2\,.$$

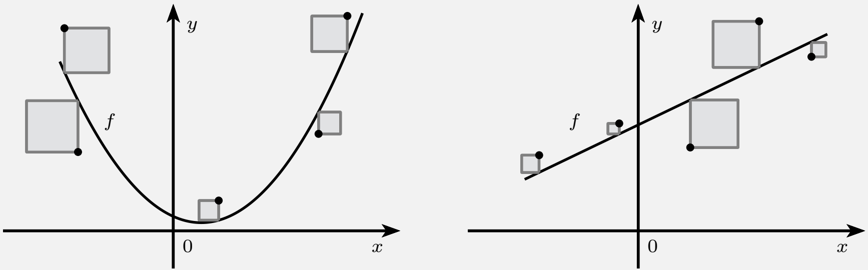
$D(0,0) = 4$, $D(\sqrt{2}, -1) = -8$, $D(-\sqrt{2}, -1) = -8$, $f_{xx} = 2$. Tedy v bodě $[0,0]$ je lokální minimum.

Metoda nejmenších čtverců

Označme y_k naměřené hodnoty v bodech x_k, $k = 1, \dots, n$ a f hledanou funkci, nejčastěji polynom. Standartním kritériem nejlepšího přiblížení hledané funkce a naměřených hodnot je požadavek, aby součet

$$S = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2$$

byl co nejmenší. Jedná se o součet obsahů čtverců, jejich strana má velikost rovnu rozdílu naměřené hodnoty a hodnoty nalezené funkce v daném bodě. O takto získaných křivkách říkáme, že byly nalezeny *metodou nejmenších čtverců*.



Jak vypadá rovnice přímky, která je proložena danými body touto metodou?

Řešení: Označme $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, …, $[x_n, y_n]$ body v rovině, kterými prokládáme přímku $y = ax + b$ metodou nejmenších čtverců. Pak hledáme minimum funkce

$$S(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2.$$

Lokální extrém dané funkce může nastat jen ve stacionárním bodě. Spočteme parciální derivace

$$S'_a = 2\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)x_k = 2\left(a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right),$$

$$S'_b = 2\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k) = 2\left(a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} y_k\right).$$

Jelikož $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$, dostaneme pro stacionární body soustavu

$$\begin{array}{rcl} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k &=& \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + \quad bn &=& \sum_{k=1}^{n} y_k\,. \end{array}$$

Předchozím příkladem jsme tak odvodily následující větu.

Věta

Nechť $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots$, $[x_n, y_n]$ *jsou body v rovině, které prokládáme přímkou* $y = ax + b$ *metodou nejmenších čtverců, tj. hledáme minimum funkce* $S(a, b) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)^2$.
Pak pro koeficienty a, b *platí:*

$$\begin{array}{rcl} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k &=& \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + \quad bn &=& \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{array}$$

Absolutní extrémy

Definice

Nechť je dána množina M v rovině, bod $[x_0, y_0]$ leží v této množině a funkce $f(x,y)$ je definovaná na této množině. Řekneme, že funkce $f(x,y)$ nabývá v bodě $[x_0, y_0]$ *absolutní maximum na množině* M, jestliže pro všechny body této množiny platí nerovnost

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0).$$

Podobně definujeme *absolutní minimum* funkce na množině. Absolutní maxima a minima souhrnně nazýváme *absolutní extrémy*.

Postup, jak hledáme absolutní extrémy:

1. Najdeme stacionární body funkce $f(x,y)$ a vybereme ty, které jsou uvnitř množiny M.
2. Vyšetříme danou funkci na hranici, tj. rovnici křivky, která tvoří část hranice, dosadíme do funkce $f(x,y)$ a vyšetřujeme absolutní extrémy funkce jedné proměnné.
3. Vypočítáme funkční hodnoty ve všech nalezených bodech a určíme extrémy.