Páté cvičení
Funkce více proměnných
Výsledky (bez záruky)

Příklad 1:

a) $f_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4,\ f_y = 2x^2 + 6xy - 5$

b) $f_x = \frac{\ln y}{2\sqrt{x}},\ f_y = \frac{\sqrt{x}}{y}$

c) $f_x = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2},\ f_y = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2},$

d) $f_x = 20(2x+3y)^9,\ f_y = 30(2x+3y)^9,$

e) $f_x = y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y},\ f_y = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y},$

f) $f_x = 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f_y = 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}.$

Příklad 2:

a) $f_x = 3x^2 - 4y^2,\ f_y = 3y^2 - 8xy,\ f_{xx} = 6x,\ f_{yy} = 6y - 8x,\ f_{xy} = -8y;$

b) $f_x = 3y^4 + 3x^2y^2,\ f_y = 12xy^3 + 2x^3y,\ f_{xx} = 6xy^2,\ f_{yy} = 36xy^2 + 2x^3,\ f_{xy} = 12y^3 + 6x^2y;$

c) $f_x = y\mathrm{e}^y,\ f_y = x\mathrm{e}^y + xy\mathrm{e}^y,\ f_{xx} = 0,\ f_{yy} = 2x\mathrm{e}^y xy\mathrm{e}^y,\ f_{xy} = \mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^y;$

d) $f_x = -\mathrm{e}^{-x-y},\ f_y = -\mathrm{e}^{-x-y},\ f_{xx} = \mathrm{e}^{-x-y},\ f_{yy} = \mathrm{e}^{-x-y},\ f_{xy} = \mathrm{e}^{-x-y}.$

Příklad 3:

a) v bodě $[7, -3]$ je lokální minimum hodnoty -19;

b) body $\left[-\frac{5}{3}, 0\right]$, $[1, \pm 4]$ jsou stacionární body, kde není extrém, v bodě $[0, 0]$ je lokální minimum hodnoty 0;

c) v bodě $[0, 0]$ je stacionární bod, kde není extrém, v bodech $[1, 1]$ a $[-1, -1]$ jsou lokální minima hodnoty -1.

Příklad 4:

a) $u'_x(x, y) > 0$ a $u'_y(x, y) < 0$, s rostoucím bohatstvím stoupá spokojenost, s rostoucím znečištěním klesá.

b) $u''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} u'_x$, tedy u''_{xy} popisuje změnu u'_x při změně y, je-li $u''_{xy} < 0$ můžeme řici, že zvyšení well-beingu společnosti získané zvýšením hrubého domácího produktu o pevnou hodnotu se snižuje s rostoucí úrovní znečištění.

c) Podobně jako v bodě b) platí $u''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} u'_y$, je-li opět $u''_{yx} < 0$ tak zvýšení well-beingu díky vystavení menšímu znečištění (což je zhruba $-u'_y$ na jednotku) stoupá s velikostí x (tedy, že tento předpoklad je v souladu s pozorováním, že chudí lidé tolerují znečištění snadněji).

Příklad 5: Můžeme si načrtnout vrstevnice, které jsou pro $K > 0$ a $L > 0$ hyperboly. Je-li $K = 0$ nebo $L = 0$, pak nabývá funkce svého minima 0 (celkem logicky). Svého globálního maxima nabývá v bodě $[1, 1, 1]$.