# Primitivní funkce, neurčitý integrál

## Od rychlosti k množství

Petr Liška

Masarykova univerzita

20.03.2024

# Primitivní funkce

## Definice

Nechť funkce $f$ a $F$ jsou definované na intervalu $I$. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce $F$ je *primitivní funkcí k funkci $f$ na intervalu $I$*. Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f$ nazýváme *neurčitý integrál* funkce $f$ a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z definice neurčitého integrálu plyne, že

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \quad \int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

tj. operace derivování a integrování jsou navzájem komplementární.

### Věta

*Je-li funkce $F$ primitivní k funkci $f$ na intervalu $I$, pak každá jiná primitivní funkce k funkci $f$ má tvar $F + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.*

### Věta

*Je-li funkce $f$ spojitá na intervalu $I$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.*

# Pravidla a vzorce

## Věta

*Nechť na intervalu $I$ existují neurčité integrály $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ a nechť $\alpha \neq 0$. Pak na $I$ existuje neurčitý integrál funkce $f+g$ a neurčitý integrál funkce $\alpha f$ a platí*

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(1) $\int 1 \,\mathrm{d}x = x + c,$

(2) $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,$

(3) $\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c,$

(4) $\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,$

(5) $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0,\ a \neq 1,$

(6) $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c,$

(7) $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c,$

(8) $\int \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c,$

(9) $\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + c,$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c,$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c,$

(12) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c,$

(13) $\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c,$

(14) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c,$

(15) $\int f(x) \,\mathrm{d}x = F(x) + c \Longrightarrow \int f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$

## Příklad

Vypočtěte neurčité integrály

a) $\int \left(3x^2 + 2e^x + 1\right) \, dx,$

b) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right) \, dx,$

c) $\int \frac{1}{3x+2} \, dx,$

d) $\int \frac{2x^2}{x^3-1} \, dx,$

e) $\int (2x+1)^5 \, dx,$

f) $\int e^{2x} \, dx,$

g) $\int \frac{1}{x^2+4} \, dx,$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx,$

i) $\int \frac{4}{8x^2+2} \, dx,$

j) $\int \frac{1}{x^2-2x+3} \, dx.$

## Spotřeba přírodních zdrojů

Odhaduje se, že světová spotřeba stříbra (v tisíci tunách) se řídí funkcí $f(t) = 21{,}4\mathrm{e}^{0{,}01t}$, kde $t$ značí počet let, které uběhnou od současnosti. Celkové zásoby stříbra se odhaduji na 400 000 tun. Odhadněte, kdy tyto zásoby stříbra dojdou.

*Řešení:* Celkovou spotřebu $C(t)$ získáme integrací funkce $f$

$$C(t) = \int 21{,}4\mathrm{e}^{0{,}01t}\,\mathrm{d}t = 21{,}4\int \mathrm{e}^{0{,}01t}\,\mathrm{d}t = 21{,}4\frac{1}{0{,}01}\mathrm{e}^{0{,}01t}+c = 2140\mathrm{e}^{0{,}01t}+c$$

Musíme ještě určit integrační konstantu $c$. Celková spotřeba za prvních nula let musí být nula, tedy víme, že $C(0) = 0$.

$$0 = C(0) = 2140\mathrm{e}^0 + c = 2140 + c \quad \Longrightarrow c = -2140$$

Pro celkovou spotřebu tak dostaneme vztah

$$C(t) = 2140\mathrm{e}^{0{,}01t} - 2140\,.$$

Abychom předpověděli, kdy rezervy ve výši 400 tisíc tun dojdou, musíme vyřešit následující rovnici

$$2140\mathrm{e}^{0{,}01t} - 2140 = 400.$$

Odtud

$$2140\mathrm{e}^{0{,}01t} = 2540$$

$$\mathrm{e}^{0{,}01t} = \frac{2540}{2140} \approx 1{,}187$$

$$\ln \mathrm{e}^{0{,}01t} = \ln 1{,}187$$

$$0{,}01t = 0{,}171$$

$$t = 17{,}1\,\text{let}$$

## Věta (Metoda per partes)

*Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu $I$. Pak platí*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

## Příklad

Vypočtěte

a) $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$, b) $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$ .

## Věta (Substituční metoda)

*Nechť funkce $f$ má na intervalu $J$ primitivní funkci $F$, funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $I$ a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Pak má složená funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ primitivní funkci na intervalu $I$ a platí*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + c.$$

Podobně lze použít substituci opačnou, tj. $x = \psi(t)$. Tuto substituční metodu můžeme zapsat ve tvaru

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \psi(t) \\ \mathrm{d}x = \psi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f\big(\psi(t)\big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

## Příklad

Vypočtěte neurčité integrály

a) $\int 5x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

# Diferenciální rovnice

## Ponziho schéma

Předpokládejme, že máme na začátku 10 investorů, přičemž každý vloží do fondu 100 000 Kč a je mu slíbena 20 % návratnost investice každý měsíc. Z vloženého milionu tak vyplatíme každému investorovi 20 000 Kč a zbylých 800 000 Kč si necháme. Označme $y$ počet investorů, které potřebujeme, abychom mohli investory nadále vyplácet a přitom si pokaždé nechat částku 800 000 Kč.

*Řešení:* Budeme-li částky uvažovat v tisících, pak máme

$$\begin{aligned}\text{příjem} &= 100\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ \text{výdej} &= 20y + 800.\end{aligned}$$

$$100\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 20y + 800.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}2y + 8.$$

## Logistický růst

Předpokládejme, že rychlost růstu nějaké populace je přímo úměrná její velikosti. Je-li $t$ čas a $P$ je počet jedinců v populaci v čase $t$, dostaneme pro rychlost růstu populace

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP, \qquad k > 0.$$

Mnoho populací se začne rozrůstat exponenciálně, ale jakmile se počet jedinců přiblíží nosné kapacitě $K$ prostředí růst se zpomalí, případně velikost populace začne klesat, pokud její velikost tuto hodnotu překročí. Pro tento model máme tedy následující předpoklady:

- $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \approx kP$ pro malá $P$, tj. ze začátku populace roste přímo úměrně svojí velikosti,
- $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} < 0$, jestliže $P > K$, tj. velikost populace se zmenšuje, jestliže počet jedinců přesáhne kapacitu prostředí.

*Řešení:*

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

## Definice

Nechť $G \in \mathbb{R}^2$, $f\colon G \to \mathbb{R}$, pak obyčejnou *diferenciální rovnicí prvního řádu* nazveme rovnici ve tvaru:

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

kde $y$ vystupuje jako závislá proměnná a $f$ je funkce dvou proměnných. *Řešením* této rovnice pak rozumíme každou funkci $\varphi$, která je diferencovatelná na nějakém otevřeném intervalu $I$ a pro kterou platí:

$$y' = f(x, \varphi(x)) \qquad \text{pro}\, x \in I \tag{4}$$

Nechť je dán bod $[x_0, y_0] \in G$. Pak úlohu najít řešení diferenciální rovnice, pro kterou platí:

$$\varphi(x_0) = y_0, \tag{5}$$

nazveme *počáteční úlohou*.

# Rovnice se separovanými proměnnými

Jde o rovnici tvaru

$$y' = f(x)g(y),$$

kde $f$ a $g$ jsou spojité funkce.
Vyjádříme-li $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, tak dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

Nejprve si všimněme, že konstantní funkce určené $g(y) = 0$ jsou řešením
Za předpokladu $g(y) \neq 0$ *separujeme* proměnné

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

a tuto rovnost integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$