# Lineární algebra

## Vektory a matice

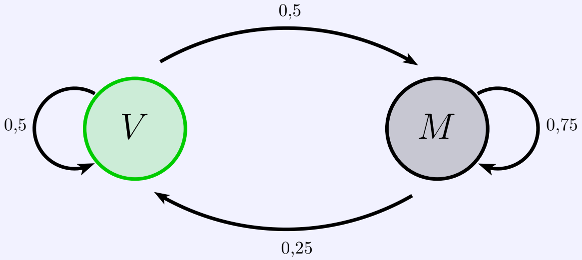
Petr Liška

Mendelova univerzita

10.04.2024

## Stěhování

Předpokládejme, že populace se stěhuje mezi dvěma regiony, např. venkovem a městem, podle následujícího schématu. Každý rok se 50% obyvatel venkova přestěhuje do měst a 25% obyvatel měst se přestěhuje na venkov. Je-li například na začátku polovina obyvatel ve městě a tento vzor migrace bude pokračovat, jak bude vypadat stav po dvou letech? A jak bude rozdělení obyvatelstva vypadat z dlouhodobého hlediska? Vyprázdní se venkov? Nebo se situace stabilizuje tak, že část obyvatel bude žít ve městě a část na venkově?

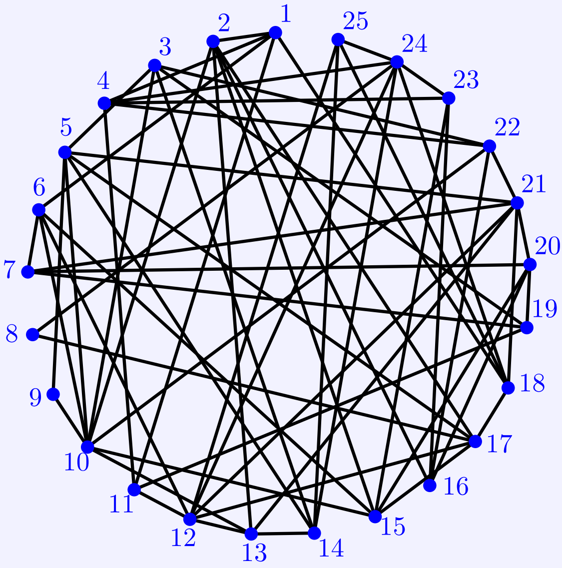


## Leslieho model populace

Uvažujme například populaci hmyzu rozdělenou na tři životní etapy: mláďata, mladistvé a dospělé jedince, přičemž každá životní etapa trvá jeden rok. Pravděpodobnost přežití mláďat je 50 % a nerozmnožují se. Mladiství mají pravděpodobnost přežití 25 % a každý z nich má průměrně čtyři mláďata. Dospělí jedinci mají pravděpodobnost přežití 0 % a každý z nich má průměrně tři mláďata. Předpokládejme, že máme 100 samiček, přičemž 40 jsou mláďata, 40 jsou mladiství a 20 dospělí. Jak se bude taková populace samiček vyvíjet v čase?

# Sociální sítě

Kdo je nejvýznamnější postavou v této síti vztahů?



## Leontiefův model

Ekonomika regionu se skládá ze tří odvětví: průmysl, zemědělství a služby. Každý sektor produkuje komodity a zdrojem jeho příjmů je prodej těchto komodit, přičemž každý sektor potřebuje vstupní komodity (od sebe i ostatních sektorů):

| | | výstupy | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Průmysl | Zemědělství | Služby |
| | Průmysl | 0,40 | 0,20 | 0,20 |
| vstupy | Zemědělství | 0,20 | 0,40 | 0,20 |
| | Služby | 0,20 | 0,10 | 0,40 |

Kromě toho existuje externí poptávka v hodnotě 30, 30 a 10 miliard na průmysl, zemědělství a služby. Jak velká musí být produkce jednotlivých odvětví?

# Vektory a počítání s nimi

## Vektor

*Vektorem* rozumíme libovolnou uspořádánou $n$-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Značíme

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Jednotlivým prvkům $x_1, x_2, \ldots, x_n$ říkáme složky vektoru, číslo $n$ se nazývá dimenze vektoru $\vec{v}$.
Dva vektory $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou si rovny, jestliže se rovnají odpovídající si složky, tj.

$$\vec{x} = \vec{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1,\, x_2 = y_2,\, \ldots,\, x_n = y_n.$$

## Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$

Množina všech vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$ společně s operacemi sčítání vektorů

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

a násobením vektoru číslem $c \in \mathbb{R}$

$$c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n)$$

se nazývá vektorový prostor $\mathbb{R}^n$.

Vektor $\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ se nazývá nulový vektor.

# Základní algebraické vlastnosti

Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou libovolné vektory z $\mathbb{R}^n$ a $c$, $d \in \mathbb{R}$, pak

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$
5. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
6. $(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$
7. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$
8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

## Skalární součin

Nechť $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom *skalární součin* $\vec{x} \cdot \vec{y}$ je definován jako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$(1, 2, -2) \cdot (2, 3, -1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) = 10$$

## Skalární součin

Nechť $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom *skalární součin* $\vec{x} \cdot \vec{y}$ je definován jako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

## Velikost (norma) vektoru

*Velikostí* vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme nezáporné číslo

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

## Ortogonální vektory

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme *ortogonální*, právě když

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0\,.$$

# Lineární kombinace, závislost a nezávislost vektorů

## Lineární kombinace

Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru $V$. Vektor $\vec{x}$, pro který platí

$$\vec{x} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_n\vec{x}_n,$$

kde $t_1, t_2, \dots, t_n$ jsou nějaká reálná čísla, se nazývá *lineární kombinace* vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

## LZ a LN

Řekneme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou *lineárně závislé*, jestliže existují reálná čísla $t_1, t_2, \dots, t_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí

$$\vec{o} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_n\vec{x}_n.$$

V opačném případě říkáme, že vektory jsou *lineárně nezávislé*.

Tedy například vektory

$$(1, 2, 1), \quad (2, -3, 1), \quad (4, 1, 3)$$

jsou lineárně závislé, protože

$$2 \cdot (1, 2, 1) + (2, -3, 1) = (4, 1, 3).$$

Vektory

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

jsou zřejmě lineárně nezávislé.

# Matice

## Definice

*Maticí* $A$ rozumíme schéma

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij}$ pro $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$ jsou reálná čísla nebo funkce. Je-li tato matice (tabulka) sestavená z $m$ řádků a $n$ sloupců, říkáme, že $A$ je matice typu $m \times n$. Je-li $m = n$ nazývá se matice $A$ *čtvercová matice*, jinak *obdélníková matice*.

Je-li $A$ čtvercová matice, říkáme, že prvky tvaru $a_{ii}$, tj. prvky, jejichž řádkový a sloupcový index jsou stejné, tvoří *hlavní diagonálu*.

# Operace s maticemi

Nechť $k \neq 0$ je reálné číslo. Výsledkem *násobení matice $A$ číslem $k$* je matice $C$, jejíž prvky jsou tvaru

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

## Příklad

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 24 \\ -4 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Nechť $A$, $B$ jsou matice téhož typu $m \times n$. *Součtem* matic $A$, $B$ nazýváme matici $C$, jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

### Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Nechť $A$ je matice typu $m \times n$ a $B$ je matice typu $n \times p$. *Součinem* matic $A$ a $B$ (v tomto pořadí) nazýváme matici $C$ (typu $m \times p$), jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

## Příklad

Pro dané matice spočtěte $A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

*Řešení:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot(-4) + 7\cdot 2 & 2\cdot 2 + 5\cdot 0 + 7\cdot 11 & 2\cdot 1 + 5\cdot 6 + 7\cdot 1 & 2\cdot 7 + 5\cdot 1 + 7\cdot(-2) \\ -1\cdot 3 + 0\cdot(-4) + 4\cdot 2 & -1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 4\cdot 11 & -1\cdot 1 + 0\cdot 6 + 4\cdot 1 & -1\cdot 7 + 0\cdot 1 + 4\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 81 & 39 & 5 \\ 5 & 42 & 3 & -15 \end{pmatrix}$$

## Definice

Je-li $A$ matice typu $m \times n$, pak *transponovaná matice* $A^T$ je matice typu $n \times m$, která vznikne z matice $A$ záměnou řádků za sloupce, tj. $i$-tý sloupec matice $A^T$ je $i$-tý řádek matice $A$ pro všechna $i$.

## Příklad

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

## Definice

*Diagonální matice* je čtvercová matice, která má všechny prvky mimo hlavní diagonálu rovny nule.

## Definice

*Jednotková matice* je čtvercová matice, která má v hlavní diagonále všechny prvky rovny jedné a všechny prvky mimo diagonálu rovny nule. Tuto matici budeme značit $I$.

## Příklad

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Základní vlastnosti počítání s maticemi

Nechť matice $A$, $B$, $C$ mají správné rozměry tak, aby se dali provést naznačené operace a $k \in \mathbb{R}$. Pak

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(A + B)C = AC + BC$
6. $k(A + B) = kA + kB$
7. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

# Proč se to dělá zrovna takto?

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix}$$

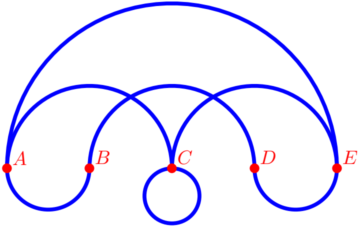
$$f\left(g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aA + bC)x_1 + (aB + bD)x_2 \\ (cA + dC)x_1 + (cB + dD)x_2 \end{pmatrix}$$

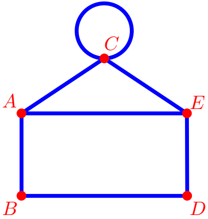
$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

# Některé aplikace matic

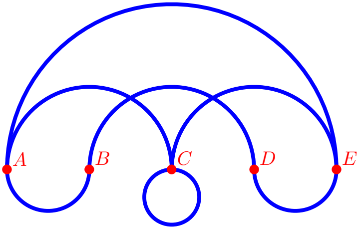
*Grafem* rozumíme konečnou množinu bodů (těm říkáme vrcholy) a konečnou množinu hran, kdy každá z nich spojuje dva vrcholy (ne nutně různé).

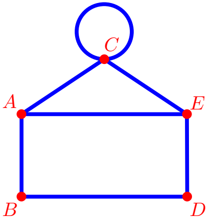



Stejný graf můžeme ale také popsat pomocí tzv. *matice sousednosti*. Pro graf o $n$ vrcholech se jedná o čtvercovou matici $n \times n$ definovanou takto

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li hrana mezi vrcholy } i \text{ a } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

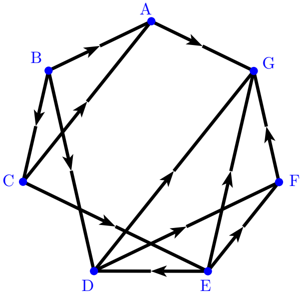



Pro náš graf dostaneme matici

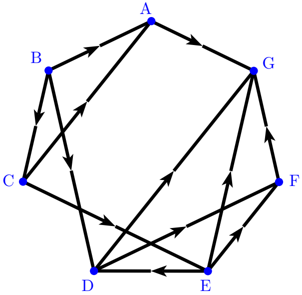
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V mnoha aplikacích, které můžeme modelovat pomocí grafu, je mezi vrcholy zároveň nějaký vztah, který vede k tomu, že hrana by měla být orientovaná. Tímto dostaneme tzv. *orientovaný graf.*




I pro orientovaný graf můžeme zavést matici sousednosti, kde pro jednotlivé koeficienty platí

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{vede-li hrana z vrcholu } i \text{ do vrcholu } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$




Pro náš graf dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Cestou* v grafu rozumíme posloupnost hran, která nám umožní cestovat z jednoho vrcholu do jiného. Její délka je pak číslo určující počet hran, které obsahuje.

Uvažme matici

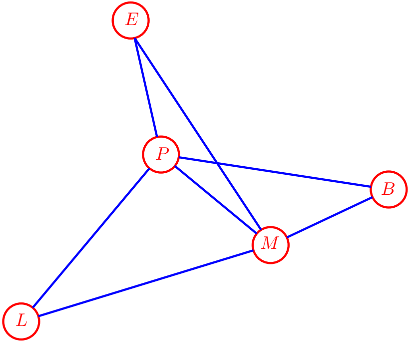
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Co reprezentují čísla v této matici? Z definice násobení matic víme, že

$$\left(A^2\right)_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{43} + a_{15}a_{53}\,.$$

Tento výraz bude nenulový, když alespoň jeden ze součinů $a_{1k}a_{k3}$ bude nenulový, což ale nastane jen tehdy, když oba členy $a_{1k}$ i $a_{k3}$ budou nenulové. To ale znamená, že existuje hrana mezi prvním a $k$-tým vrcholem a taky hrana mezi $k$-tým a třetím vrcholem, tedy existuje cesta délky 2, která spojuje první a třetí vrchol.

Tyto myšlenky můžeme ilustrovat na celé řadě příkladů. Uvažme například následující graf a příslušnou matici sousednosti, které zobrazují přímé letecké spoje mezi Brnem, Edinburghem, Lisabonem, Mnichovem a Paříží.



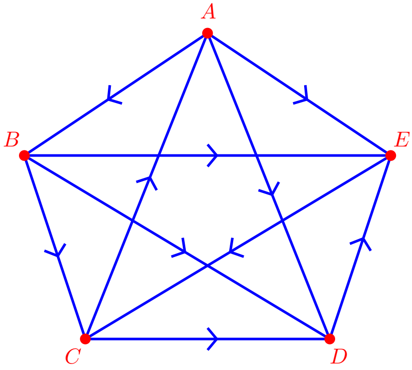

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} B & E & L & M & P \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ E \\ L \\ M \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nyní můžeme například snadno odpovědět na otázku, kolik existuje různých letů z Brna do libovolného města s dvěma přestupy:

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 9 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Odpověď dává první řádek naší matice. Vidíme, že například z Brna do Edinburghu existují čtyři různé cesty s dvěma přestupy a do Paříže je jich už devět. Která z těchto cest by byla nejkratší nebo nejrychlejší je již ale jiný příběh (i když stále z teorie grafů).

Představme si například pětici hráčů, kteří hrají turnaj ve stylu každý s každým. Výsledky můžeme snadno zachytit pomocí grafu, kdy hranu od prvního hráče k druhému vedeme tehdy, když první druhého porazí. Dostaneme tak například následující graf a příslušnou matici sousednosti




$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dejme tomu, že chceme seřadit hráče podle počtu jejich vítězství. Pro tento účel nám stačí samozřejmě jen sečíst, kolik jedniček je v každém řádku. Tento výpočet můžeme také nahradit následujícím násobením:

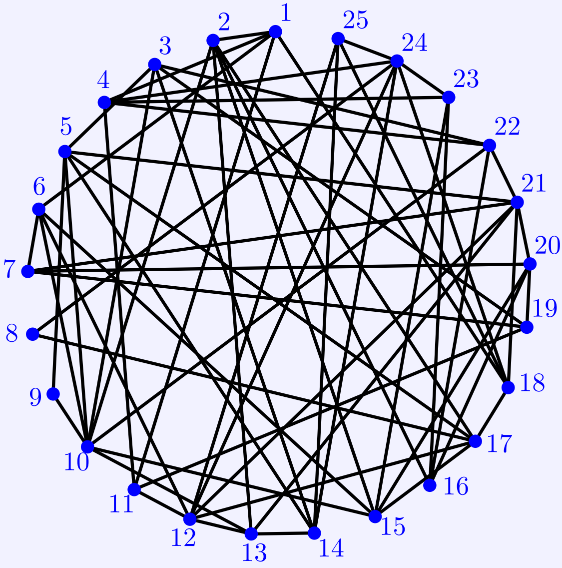
$$A \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že někteří hráči ($A$ a $B$, $C$ a $D$) mají stejný počet výher. Pokud bychom chtěli rozhodnout, který z nich je lepší, můžeme například použít kritérium nepřímých vítězství, tj. kolik hráčů porazili hráči, které daný hráč porazil. Ve slovech matic (po předchozím příkladu je snad jasné proč) dostaneme

$$(A + A^2) \cdot J = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## Sociální sítě

Kdo je nejvýznamnější postavou v této síti vztahů?



$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

# Leslieho model

## Příklad

Uvažujme například populaci hmyzu rozdělenou na tři životní etapy: mláďata, mladistvé a dospělé jedince, přičemž každá životní etapa trvá jeden rok. Pravděpodobnost přežití mláďat je 50 % a nerozmnožují se. Mladiství mají pravděpodobnost přežití 25 % a každý z nich má průměrně čtyři mláďata. Dospělí jedinci mají pravděpodobnost přežití 0 % a každý z nich má průměrně tři mláďata. Předpokládejme, že máme 100 samiček, přičemž 40 jsou mláďata, 40 jsou mladiství a 20 dospělí. Jak se bude taková populace samiček vyvíjet v čase?

Po jednom roce bude počet mláďat

$$40 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 220.$$

Počet mladistvých bude počet mláďat, která přežijí, tj.

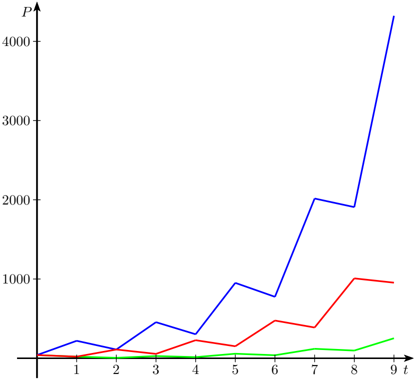
$$40 \cdot 0{,}5 = 20$$

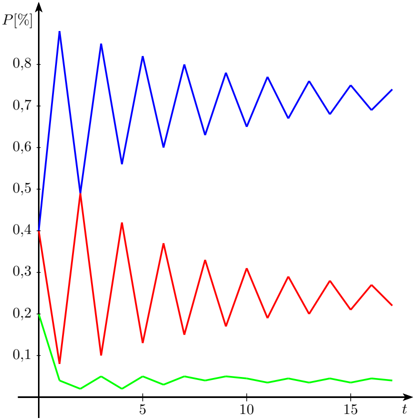
a podobně pro dospělé

$$40 \cdot 0{,}25 = 10.$$

Všechny tyto výpočty můžeme snadno zapsat jednou maticovou rovnicí

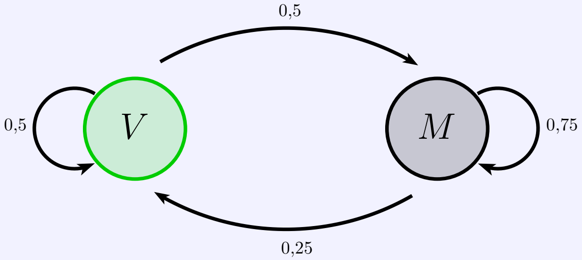
$$L \cdot \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1 \,.$$


P
4000
3000
2000
1000
1
2
3
4
5
6
7
8
9
t


P[%]
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
5
10
15
t

## Stěhování

Předpokládejme, že populace se stěhuje mezi dvěma regiony, např. venkovem a městem, podle následujícího schématu. Každý rok se 50% obyvatel venkova přestěhuje do měst a 25% obyvatel měst se přestěhuje na venkov. Je-li například na začátku polovina obyvatel ve městě a tento vzor migrace bude pokračovat, jak bude vypadat stav po dvou letech? A jak bude rozdělení obyvatelstva vypadat z dlouhodobého hlediska? Vyprázdní se venkov? Nebo se situace stabilizuje tak, že část obyvatel bude žít ve městě a část na venkově?



*Řešení:*

$$v_{k+1} = 0{,}5v_k + 0{,}25m_k$$
$$m_{k+1} = 0{,}5v_k + 0{,}75m_k$$

$$\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ m_k \end{pmatrix}$$
$$\vec{p}_{k+1} = T \cdot \vec{p}_k$$

$$\vec{p}_{k+2} = T \cdot \vec{p}_{k+1} = T \cdot (T \cdot \vec{p}_k) = T^2 \cdot \vec{p}_k$$

$$\vec{p}_2 = T^2 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}3125 \\ 0{,}625 & 0{,}6875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34375 \\ 0{,}65625 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = T \cdot \vec{p}$$

## Markovův řetězec

*Markovův řetězec* je náhodný proces, který popisuje posloupnost možných událostí. Pro tento proces platí, že pravděpodobnost přechodu procesu do následujícího stavu závisí pouze na současném stavu.

## Matice přechodu

Matici, která obsahuje v každém sloupci (řádku) pravděpodobnosti přechodu od jednoho stavu k druhému, nazveme *maticí přechodu* daného Markovova řetězce.

## Stacionární distribuce

Je-li $T$ matice přechodu daného Markovova řetězce a existuje-li vektor $\vec{v}$ takový, že

$$\vec{v} = T \cdot \vec{v}$$

nazveme vektor $\vec{v}$ *stacionární distribucí (rovnovážným stavem)* Markovova řetězce.