Posloupnosti a řady

Petr Liška

Masarykova univerzita v Brně

22.02.2024

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$7, 14, 21, 28, \ldots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \ldots$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

$$P_0(1+r), P_0(1+r)^2, P_0(1+r)^3, \ldots$$

$$\frac{R}{1+i}, \frac{R}{(1+i)^2}, \frac{R}{(1+i)^3}, \ldots$$

$$\bigstar, \heartsuit, \bullet, \bigstar, \heartsuit, \bullet, \ldots$$

Posloupnost a jak ji zadat

Definice

Posloupnost je předpis a, který každému prvku n množiny $\mathbb{N}$ přiřadí právě jedno číslo a_n z $\mathbb{R}$. Hodnotu a_n nazýváme *n-tý člen posloupnosti* a celou posloupnost pak zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo zkráceně $\{a_n\}$.

Posloupnost obvykle zadáváme

- vzorcem pro n-tý člen;
- rekurentně;
- (výčtem členů).

Je možné mít i konečnou posloupnost, pokud v předchozí definici uvážíme místo množiny $\mathbb{N}$ její podmnožinu D, která obsahuje všechna přirozená čísla menší nebo rovno nějaké pevně dané číslo.

Základní vlastnosti posloupností

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

rostoucí, jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

klesající, jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

nerostoucí, jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

neklesající, jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

shora ohraničená, jestliže existuje $U \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

zdola ohraničená, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

ohraničená, jestliže je ohraničená shora i zdola.

Aritmetická posloupnost

Definice

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *aritmetická*, jestliže $\exists d \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslo d se nazývá *diference*.

Pro n-tý člen platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Pro libovolná r, $s \in \mathbb{N}$ platí

$$a_s = a_r + (s-r)d.$$

Značí-li s_n součet prvních n členů posloupnosti, potom

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Vzoreček není žádné kouzlo (možná trochu)

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n-k} + \cdots + a_2 + a_1$$

Chytře sečteme a seskupíme

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{k+1} + a_{n-k}) + \cdots + (a_n + a_1)$$

a ještě chytřeji vyjádříme

$$a_{k+1} = a_1 + kd\,, \qquad a_{n-k} = a_1 + (n-k-1)d = a_1 + (n-1)d - kd = a_n - kd.$$

A pak už je jasné, že

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Příklad

$a_1 = 12$, $a_3 = 16$, $d = ?$, $a_{10} = ?$, $s_{10} = ?$

Řešení. $d = 2$, $a_{10} = 30$, $s_{10} = 210$.

Příklad

Zakázník si koupil zboží za 24 000 Kč a zavázal se jej splatit ve 12 měsíčních splátkách po 2 000 Kč plus 1,5 % z nesplacené částky. Jaká je např. desátá splátka a kolik zaplatí celkem?

Řešení.

První splátka: $2\,000 + 0{,}015 \cdot 24\,000 = 2\,360\,\text{Kč}$

Druhá splátka: $2\,000 + 0{,}015 \cdot 22\,000 = 2\,330\,\text{Kč}$

Třetí splátka: $2\,000 + 0{,}015 \cdot 20\,000 = 2\,300\,\text{Kč}$

$d = -30\,\text{Kč}$. Tedy desátá splátka

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d = 2\,360 + 9(-30) = 2\,090\,\text{Kč}$$

$$s_{12} = \frac{12}{2}(2\,360 + 2\,030) = 26\,340\,\text{Kč}.$$

Geometrická posloupnost

Definice

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *geometrická*, jestliže $\exists q \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslo q se nazývá *kvocient*.

Pro n-tý člen platí

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Pro libovolná r, $s \in \mathbb{N}$ platí

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}.$$

Značí-li s_n součet prvních n členů posloupnosti, potom

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad q \neq 1,$$

$$s_n = n \cdot a_1, \qquad q = 1.$$

Ještě jedno odvození

$$s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}$$
$$q s_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n$$

Odečtením dostaneme

$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1$$

Present value

Příklad

Jak velké množství peněz je nutné investovat, abychom za čtyři roky získali 12 000 Kč, je-li roční úroková míra 10 %?

Řešení. Je-li

$$P_n = P_0(1+i)^n,$$

pak

$$P_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n}.$$

Pro naše konkrétní hodnoty dostáváme

$$P_0 = \frac{12\,000}{(1+0{,}1)^4} = 8\,196{,}16\,\text{Kč}.$$

Příklad

Je výhodná investice 75 000 Kč, pokud příštích 5 let získáme každý rok 20 000 Kč a roční úroková míra je 12 %?

Řešení.

PV 20 000 Kč za první rok je $\frac{20\,000}{1{,}12} = 17\,857{,}1$ Kč

PV 20 000 Kč za dva roky je $\frac{20\,000}{(1{,}12)^2} = 15\,943{,}9$ Kč

PV 20 000 Kč za tři roky je $\frac{20\,000}{(1{,}12)^3} = 14\,235{,}6$ Kč

PV 20 000 Kč za čtyři roky je $\frac{20\,000}{(1{,}12)^4} = 12\,710{,}4$ Kč

PV 20 000 Kč za pět let je $\frac{20\,000}{(1{,}12)^5} = 11\,348{,}5$ Kč

Současná hodnota projektu je tedy

$$17\,857{,}1 + 15\,943{,}9 + 14\,235{,}6 + 12\,710{,}4 + 11\,348{,}5 = 72\,095{,}5 \text{ Kč}$$

Zobecnění

$$PV = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} =$$

$$= \frac{\frac{R}{1+i}\left[1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{R\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}{1+i-1} =$$

$$= \frac{R\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}.$$

Prazvláštní číslo

Uvažme, že máme částku P_0 a roční úrokovou míru $i \in (0, 1]$.

po jednom roce dostaneme

$$P_1 = P_0 + iP_0 = P_0(1 + i)$$

po dvou letech dostaneme

$$P_2 = P_1 + iP_1 = P_1(1 + i) = P_0(1 + i)(1 + i) = P_0(1 + i)^2$$

a podobně po n letech

$$P_n = P_0(1 + i)^n$$

Co se stane, když dostaneme čtvrtinu úroku každého čtvrt roku?

$$P_{\frac{1}{4}} = P_0\left(1 + \frac{i}{4}\right), \ldots, P_1 = P_0\left(1 + \frac{i}{4}\right)^4, \ldots, P_n = P_0\left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n}$$

Prazvláštní číslo

Pro jednoduchost uvažme, že $i = 1$ a $n = 1$. Co se stane, když budeme úročit každý měsíc, týden, hodinu, minutu...?

m	$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$	částka
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	$2P_0$
4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	$2{,}44141P_0$
12	$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	$2{,}61304P_0$
365	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	$2{,}71457P_0$
8760	$\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$	$2{,}71813P_0$
525600	$\left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600}$	$2{,}71828P_0$

$$P_n = P_0\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}it} = P_0\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{in} \underset{k\to\infty}{=} P_0\mathrm{e}^{in}.$$

Limita posloupnosti

Definice

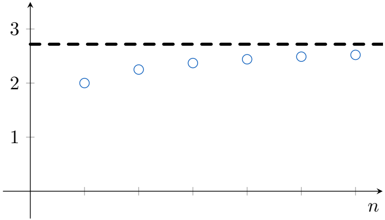
Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* A, jestliže se k číslu A můžeme s členy posloupnosti přiblížit libovolně blízko tím, že vezmeme hodnoty n dostatečně velké.

Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ limitu, říkáme, že *konverguje*, a značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, případně $a_n \to A$ pro $n \to \infty$.

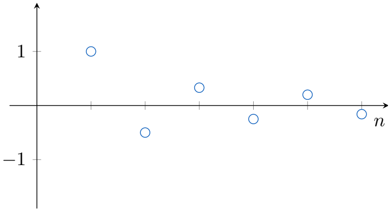
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$, jestliže členy posloupnosti můžeme udělat libovolně velké tím, že vezmeme dostatečně velké n. Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Podobně definujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že posloupnost *diverguje*.

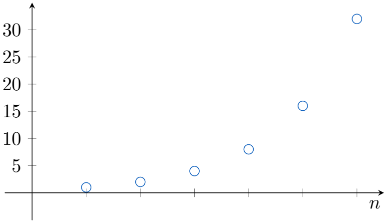
Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že *osciluje*.



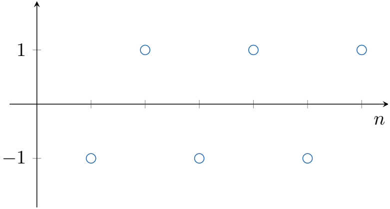
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$



$$a_n = 2^{n-1}$$



$$a_n = (-1)^n$$

Co je to vlastně to nekonečno?

Definice

Množinu $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, která je uspořádaná tak, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $-\infty < x < +\infty$, nazýváme rozšířenou množinou reálných čísel.

Je-li $c \in \mathbb{R}$, $0 < k < +\infty$, $-\infty < z < 0$ zavádíme

1.
$$c + (\pm\infty) = (\pm\infty) + c = \pm\infty,$$
$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty$$

2.
$$k \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad z \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$
$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty, \quad -\infty \cdot (-\infty) = +\infty, \quad +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

3.
$$\frac{c}{\pm\infty} = 0$$

Příklad

Pokud utratíme peníze za zboží a služby, tak ti, kteří je obdrží, část z nich opět utratí. Ti, kteří obdrží dvakrát utracené peníze, z nich část opět utratí atd.
Uvažme, že vláda zahájí tento proces tím, že utratí částku D Kč. Každý příjemce pak utratí $100c\,\%$ a uspoří $100s\,\%$, přičemž $c + s = 1$.

a) Jak velké jsou celkové výdaje S_n po n krocích?

b) Jaký je význam $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$?

Řešení. a)

$$S_n = D + cD + c(cD) + \cdots + c^{n-1}D = D\frac{1-c^n}{1-c}\,.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} D\frac{1-c^n}{1-c} = \frac{D}{1-c} = \frac{D}{s}$$

Je-li např. $c = 0{,}8$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 5D$.

Zápis pomocí sumy

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 = \sum_{n=1}^{100} n$$

$$PV = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R}{(1+i)^k}$$

$$S_n = D + cD + c(cD) + \cdots + c^{n-1}D = \sum_{i=0}^{n-1} c^i D$$

Pravidla

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Nekonečná řada

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou*. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \ldots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.
Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s. Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*.

Věta (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverguje} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \quad \text{diverguje} \qquad \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = ?$$

Řešení. Nechť $q = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} n a_1 = \pm\infty$. Nechť $q = -1$, pak řada je $a_1 + (-a_1) + \cdots$ a platí

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{pro sudé}\, n \\ a_1 & \text{pro liché}\, n \end{cases}$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje. Pro $|q| \neq 1$

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}\,.$$

Pro $q > 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, pro $q < -1$ tato limita neexistuje a pro $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}\,.$$