Pravděpodobnost

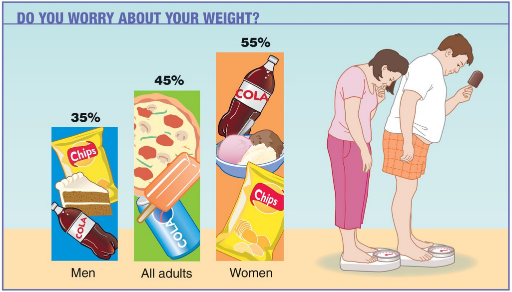
Povinná literatura: Mann (2016, 2024), Kapitola 4

Z čeho studovat čtvrtou lekci?

Povinná literatura:	Mann (2016, 2024), kap. 04
Příprava na cvičení:	Leaflet 05 Koncepty a procedury, cv. 05, kap. 04
Příprava na zkoušku:	Mann (2016, 2024), kap. 04 Leaflet 05 Sbírka úloh, kap. 04 Koncepty a procedury, cv. 05, kap. 04

Obáváte se o svou váhu?

Průzkum Gallup, provedený mezi 1013 americkými dospělými ve věku 18 let a více ve dnech 7. až 10. července 2014, se jich zeptal: „Jak často si děláte starosti o svou váhu?“ Podle údajů z přiloženého grafu 45 % dospělých ve vzorku uvedlo, že si dělají starosti. Při rozdělení podle pohlaví bylo toto procento 35 % u mužů a 55 % u žen.



Data source: Gallup poll of 1013 adults aged 18 and older conducted July 7–10, 2014

Jakou marketingovou strategii navrhnete společnosti vyrábějící Kolu?

Pravděpodobnost v inferenční statistice

Pravděpodobnost, která měří, jaká je šance, že dojde k určité události, je důležitou součástí statistiky. Je základem inferenční statistiky.

V inferenční statistice děláme rozhodnutí za podmínek nejistoty. Teorie pravděpodobnosti se používá k vyhodnocení nejistoty, která je součástí těchto rozhodnutí.

Například odhad prodeje na příští rok pro společnost je založen na mnoha předpokladech, z nichž některé mohou být pravdivé a jiné nikoli. Teorie pravděpodobnosti nám pomůže učinit rozhodnutí za těchto podmínek nedokonalých informací a nejistoty.

Kombinace pravděpodobnosti a rozdělení pravděpodobnosti (které jsou probírány v kapitolách 5 až 7) s popisnou statistikou nám pomůže činit rozhodnutí o populacích na základě informací získaných z výběrových souborů. Kapitola 4 tedy představí základní pojmy pravděpodobnosti a pravidla pro výpočet pravděpodobnosti.

Experiment, výsledek experimentu a výběrový prostor

Experiment je proces, který, když je proveden, vede k jedinému z mnoha pozorování. Takto získaná pozorování se nazývají **výsledky experimentu**. Soubor všech výsledků pro daný experiment se nazývá **výběrový prostor**.

Tabulka: Příklady experimentu, výsledků experimentu a výběrového prostoru

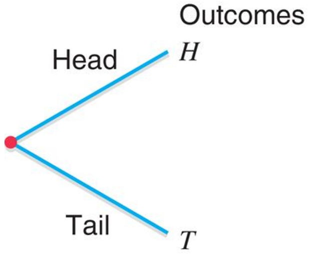
Experiment	Výsledky	Výběrový prostor
Hod mincí jednou	Panna, Orel	$S = \{\text{Panna, Orel}\}$
Hod kostkou jednou	1, 2, 3, 4, 5, 6	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Hod mincí dvakrát	HH, HO, OH, OO	$S = \{\text{HH, HO, OH, OO}\}$
Losování v loterii	Výhra, Prohra	$S = \{\text{Výhra, Prohra}\}$
Absolvování testu	Prospěl, Neprospěl	$S = \{\text{Prospěl, Neprospěl}\}$

Příklad 1

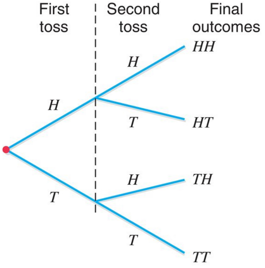
Zadání: Nakreslete stromový diagram pro experiment s jedním hodem mincí. Nakreslete stromový diagram pro experiment s dvěma hody mincí.

Řešení:

Obrázek: Jeden hod mincí



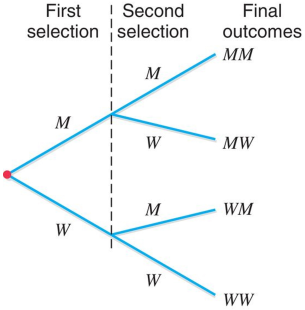
Obrázek: Dva hody mincí



Příklad 2

Zadání: Předpokládejme, že náhodně vybereme dva pracovníky z firmy a sledujeme, zda je vybraný pracovník pro každou volbu muž nebo žena. Napište všechny možné výsledky tohoto experimentu. Nakreslete stromový diagram pro tento experiment.

Řešení:



Jev, Elementární a složený jev

Jev je soubor jednoho nebo více výsledků experimentu.

Jev, který zahrnuje právě jeden z konečných výsledků experimentu, se nazývá **elementární jev** a označuje se E_i. Elementární jev je „nejjednodušší“ výsledek experimentu, který už nelze dále rozložit.

Složený jev je soubor více než jednoho výsledku experimentu.

Příklad 3

Zadání: Znovu zvažte Příklad 2. Zde lze chápat, že každý z čtyř konečných výsledků (MM, MW, WM, WW) pro tento experiment je elementární jev. Tyto čtyři jevy mohou být označeny E_1, E_2, E_3 a E_4. Takže,

$$E_1 = \{MM\}, E_2 = \{MW\}, E_3 = \{WM\}, E_4 = \{WW\}.$$

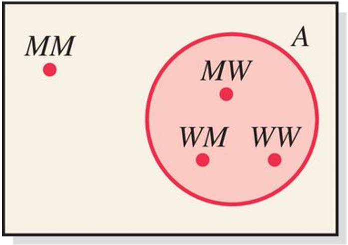
Nechť jev A znamená, že byl vybrán nanejvýš jeden muž. Je jev A elementární nebo složený jev?

Příklad 3: Řešení

Zde „nanejvýš jeden muž“ znamená, že je vybrán jeden nebo žádný muž. Takže jev A nastane, pokud není vybrán žádný muž nebo jeden muž. Jev A je tedy dán jako

$$A = \{MW, WM, WW\}$$

Protože jev A obsahuje více než jeden výsledek, je to složený jev. Diagram na obrázku poskytuje grafickou prezentaci složeného jevu A.



Experiment, výsledek experimentu a výběrový prostor

Pravděpodobnost

Marginální a podmíněná pravděpodobnost

Průnik jevů a pravidlo násobení

Sjednocení jevů a pravidlo sčítání

Počet možných výsledků, faktoriál, kombinace a permutace

Pravděpodobnost

Pravděpodobnost je číslo (číselná míra) vyjadřující očekávatelnost určitého jevu, tzn. že určitý jev nastane.

Dvě vlastnosti pravděpodobnosti:

- **První vlastnost pravděpodobnosti** Pravděpodobnost jevu vždy leží v rozsahu od 0 do 1.

$$0 \leq P(E_i) \leq 1$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- **Druhá vlastnost pravděpodobnosti:** Součet pravděpodobností všech elementárních jevů (nebo konečných výsledků) experimentu, označený $\sum P(E_i)$, je vždy 1.

$$\sum P(E_i) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots = 1$$

Tři konceptuální přístupy k pravděpodobnosti.

1. Klasická pravděpodobnost
2. Pravděpodobnost založená na relativní četnosti
3. Subjektivní pravděpodobnost

1. Klasická pravděpodobnost

Dva nebo více výsledků, které mají stejnou pravděpodobnost výskytu, se označují jako **stejně očekávatelné výsledky**.

Pravidlo pro výpočet klasické pravděpodobnosti:

$$P(E_i) = \frac{1}{\text{Celkový počet možných výsledků experimentu}}$$

$$P(A) = \frac{\text{Počet příznivých výsledků pro jev A}}{\text{Celkový počet možných výsledků experimentu}}$$

Příklady:

Příklad 3: Určete pravděpodobnost padnutí hlavy při 1 hodu mincí.

Řešení:

$$P(\text{panna}) = \frac{1}{\text{Celkový počet možných výsledků}} = \frac{1}{2} = \mathbf{0.50}$$

Příklad 4: Určete pravděpodobnost padnutí sudého čísla při jednom hodu kostkou.

Řešení:

$A = \text{sudé číslo je získáno} = \{2, 4, 6\}$. Pokud je získáno kterékoliv z těchto tří čísel, událost A nastala.

$$P(\text{sudé číslo}) = \frac{\text{Počet výsledků příznivých jevu } A}{\text{Celkový počet možných výsledků}} = \frac{3}{6} = \mathbf{0.50}$$

2. Pravděpodobnost založená na relativní četnosti

Použití relativní četnosti jako aproximace pravděpodobnosti

Pokud je experiment opakován n krát a jev A je pozorován f krát, kde f je četnost, pak podle konceptu relativní četnosti pravděpodobnosti platí:

$$P(A) = \frac{f}{n} = \frac{\text{Četnost jevu A}}{\text{Velikost vzorku}}$$

Příklad 6

Zadání: U deseti z 500 náhodně vybraných aut vyrobených v určité automobilce bylo zjištěno, že jsou vadná. Předpokládáme-li, že vadná auta jsou vyráběna náhodně, jaká je pravděpodobnost, že další vyrobené auto v této automobilce bude vadné?

Řešení: Nechť n označuje celkový počet aut ve vzorku a f počet vadných aut z n. Víme tedy že $n = 500$ a $f = 10$.

Použitím konceptu relativní četnosti pravděpodobnosti získáme

$$P(\text{další auto je vadné}) = \frac{f}{n} = \frac{10}{500} = 0.02$$

2. Pravděpodobnost založená na relativní četnosti

Zákon velkých čísel

Pokud je experiment opakován pořád dokola, pravděpodobnost jevu získaná z relativní četnosti se blíží skutečné (nebo teoretické) pravděpodobnosti.

Table 4.3 **Simulating the Tosses of a Coin**

Number of Tosses	Number of Heads	Number of Tails	$P(H)$	$P(T)$
3	0	3	.00	1.00
8	6	2	.75	.25
25	9	16	.36	.64
100	61	39	.61	.39
1000	522	478	.522	.478
10,000	4962	5038	.4962	.5038
1,000,000	500,313	499,687	.5003	.4997

Pozor! Když je experiment opakován pouze několikrát, získané pravděpodobnosti nemusí být blízké skutečným pravděpodobnostem. S rostoucím počtem opakování se pravděpodobnosti získaných výsledků stávají velmi blízkými skutečným pravděpodobnostem.

Příklad 7

Zadání: Výzkumník chce určit pravděpodobnost, že náhodně vybraná rodina v Brně vlastní dům. Jak může tuto pravděpodobnost určit?

Řešení: Existují dva možné výsledky pro náhodně vybranou rodinu z Brna: „Tato rodina vlastní dům“ a „Tato rodina dům nevlastní“. Tyto dvě události nemají stejnou pravděpodobnost. Proto nemůže být použito klasické pravidlo pravděpodobnosti. Nicméně tento experiment můžeme opakovat znovu a znovu. Proto budeme používat přístup pravděpodobnosti založený na relativní četnosti.

3. Subjektivní pravděpodobnost

Subjektivní pravděpodobnost je pravděpodobnost přiřazená jevu na základě subjektivního úsudku, zkušeností, informací a přesvědčení. Neexistují žádná pevná pravidla pro přiřazení takovýchto pravděpodobností.

Marginální a podmíněná pravděpodobnost

Marginální pravděpodobnost je pravděpodobnost jednoho jevu bez zohlednění jakéhokoli jiného jevu.

Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost, že jev nastane za předpokladu, že jiný jev již nastal. Pokud A a B jsou dva jevy, pak zápis

$$P(A|B)$$

čteme jako „pravděpodobnost nastání jevu A za předpokladu, že jev B již nastal".

Příklad 8

Zadání: Předpokládejme, že všech 100 zaměstnanců společnosti bylo dotázáno, zda jsou pro nebo proti vysokým platum generálních ředitelů amerických společností. Tabulka poskytuje dvourozměrnou klasifikaci odpovědí těchto 100 zaměstnanců. Předpokládejme, že každý zaměstnanec odpověděl buď pro nebo proti.

	In Favor	Against
Male	15	45
Female	4	36

a) Určete marginální pravděpodobnosti.

b) Vypočítejte podmíněnou pravděpodobnost P (in favor | male) pro data o 100 zaměstnancích uvedená v tabulce.

Příklad 8: Řešení (a) Marginální pravděpodobnosti

Řešení:

Table 4.6 Listing the Marginal Probabilities

	In Favor (A)	Against (B)	Total
Male (M)	15	45	60
Female (F)	4	36	40
Total	19	81	100

$P(M) = 60/100 = .60$

$P(F) = 40/100 = .40$

$P(A) = 19/100 = .19$

$P(B) = 81/100 = .81$

Příklad 8: Řešení (b) Podmíněná pravděpodobnost

Řešení:

	In Favor	Against	Total
Male	15	45	60

Males who are in favor

Total number of males

$$P(\text{in favor} \mid \text{male}) = \frac{\text{Počet mužů, kteří jsou pro}}{\text{Celkový počet mužů}} = \frac{15}{60} = .25$$

Související koncepty pravděpodobnosti

Jevy, které nemohou nastat společně, se nazývají **neslučitelné jevy**.

Dva jevy se považují za nezávislé, pokud výskyt jednoho neovlivňuje pravděpodobnost výskytu druhého. Jinými slovy, A a B se nazývají **nezávislé jevy**, pokud

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{nebo} \quad P(B|A) = P(B).$$

Doplňkem jevu A, označeným $\bar{A}$ a čteným jako „A doplněk", je jev, který zahrnuje všechny možné výsledky experimentu, které nejsou v A. Jevy A a $\bar{A}$ nazýváme jako **komplementární jevy**.

Příklad 9- (neslučitelné jevy)

Zadání: Zvažte následující jevy pro jeden hod kostkou:

A = padne sudé číslo = $\{2, 4, 6\}$

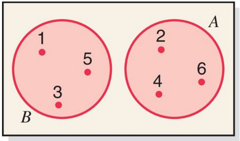
B = padne liché číslo = $\{1, 3, 5\}$

C = padne číslo menší než 5 = $\{1, 2, 3, 4\}$

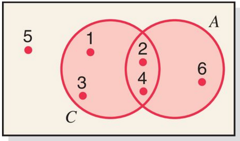
Jsou jevy A a B navzájem neslučitelné? Jsou jevy A a C navzájem neslučitelné?

Příklad 9: Řešení

Obrázek: Neslučitelné jevy A a B



Obrázek: Slučitelné jevy A a C



Z definic jevů A a B a z obrázku vlevo můžeme pozorovat, že jevy A a B nemají společné výsledky. Tedy jevy A a B **jsou navzájem neslučitelné**.

Z definic jevů A a C a z obrázku vpravo můžeme pozorovat, že jevy A a C mají dva společné výsledky: dvojku a čtyřku. Pokud tedy hodíme kostkou a obdržíme buď dvojku a čtyřku, pak se jevy A a C dějí ve stejnou dobu. Tedy jevy A a C **nejsou navzájem neslučitelné**.

Příklad 10- (nezávislé jevy)

Zadání: Opět se vraťme k anketě o názoru na vysoké platy ředitelů. Jsou jevy „in favor“ a „male“ nezávislé?

	In Favor	Against
Male	15	45
Female	4	36

Příklad 10: Řešení

Pro ověření, zda jsou jevy „in favor“ a „male“ nezávislé, najdeme (marginální) pravděpodobnost „in favor“ a poté podmíněnou pravděpodobnost „in favor“ za předpokladu, že jev „male“ již nastal. Pokud jsou tyto dvě pravděpodobnosti stejné, pak jsou tyto dva jevy nezávislé, jinak jsou závislé. Z tabulky výše vypočítáváme následující dvě pravděpodobnosti:

$$P(\text{in favor}) = \frac{19}{100} = 0.19$$

$$P(\text{in favor} \mid \text{male}) = \frac{15}{60} = 0.25$$

Protože tyto dvě pravděpodobnosti **nejsou stejné**, jevy jsou **závislé**.

Příklad 11- (komplementární jevy)

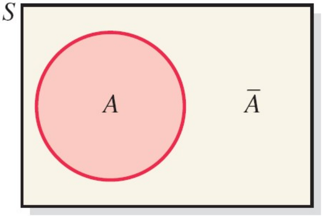
Zadání: Ve skupině 2000 daňových poplatníků bylo 400 z nich alespoň jednou prověřeno daňovým úřadem. Pokud je z této skupiny náhodně vybrán jeden daňový poplatník, jaké mohou nastat výsledné jevy pro tento experiment a jaké jsou jejich pravděpodobnosti? Jsou tyto jevy k sobě komplementární?

Příklad 11: Řešení

Jedná se o komplementární jevy, konkrétně:

A = vybraný daňový poplatník byl alespoň jednou prověřen

$\bar{A}$ = vybraný daňový poplatník nikdy nebyl prověřen



Pravděpodobnosti komplementárních jevů:

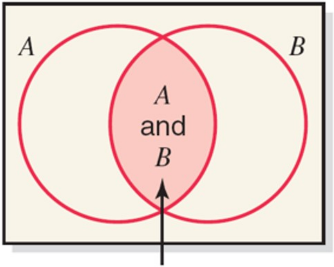
$$P(A) = \frac{400}{2000} = 0.20$$

$$P(\bar{A}) = \frac{1600}{2000} = 0.80$$

Průnik jevů

Uvažujme A a B jako dva jevy definované v prostoru výsledků.

Průnik A a B představuje všechny výsledky, které jsou společné pro oba jevy A a B, a je označován jako (A a zároveň B) = ($A \cap B$).



Intersection of A and B

Pravděpodobnost průniku jevů a pravidlo násobení

Společná pravděpodobnost nastání dvou jevů se nazývá **pravděpodobnost průniku jevů A a B**. Zapisuje se jako

$$P(A \text{ a zároveň } B) = P(A \cap B)$$

Pokud jsou navíc jevy A a B **nezávislé**, pak lze pravděpodobnost průniku těchto dvou nezávislých jevů zapsat jako

$$P(A \text{ a zároveň } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost průniku dvou **závislých** jevů A a B je

$$P(A \text{ a zároveň } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \text{nebo} \quad P(B) \cdot P(A|B)$$

Příklad 12

Zadání: V kancelářské budově jsou dva požární detektory. Pravděpodobnost, že jakýkoliv detektor tohoto typu při požáru selže, je 0.02. Určete pravděpodobnost, že oba tyto požární detektory při požáru selžou. Předpokládejme, že tyto dva požární detektory jsou nezávislé.

Řešení: Definujme následující dva jevy:

A = první požární detektor během požáru selže

B = druhý požární detektor během požáru selže

Pak pravděpodobnost společného nastoupení **nezávislých** jevů A a B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (0.02) \cdot (0.02) = 0.0004$$

Příklad 13

Zadání: V skupině 20 vysokoškolských studentů má 7 z nich rádo ledový čaj a ostatní ne. Dva studenti jsou náhodně vybráni z této skupiny.

(a) Určete pravděpodobnost, že oba vybraní studenti mají rádi ledový čaj.

(b) Určete pravděpodobnost, že první vybraný student má rád ledový čaj a druhý ne.

Příklad 13: Řešení (a)

Na základě daných informací:

P(první student má rád ledový čaj) $= \frac{7}{20} = 0.35$

P(druhý student má rád ledový čaj | první student má rád ledový čaj) $= \frac{6}{19} = 0.3158$

Takže pravděpodobnost průniku obou jevů je:

P(oba studenti mají rádi ledový čaj)

$=$ P(první student má rád ledový čaj)$\cdot$

P(druhý student má rád ledový čaj | první student má rád ledový čaj)

$= (0.35) \cdot (0.3158) = 0.1105$

Příklad 13: Řešení (b)

Na základě daných informací:

P(první student má rád ledový čaj) $= \frac{7}{20} = 0.35$

P(druhý student nemá rád ledový čaj | první student má rád ledový čaj) $= \frac{13}{19} = 0.6842$

Takže pravděpodobnost průniku obou jevů je:

P(první student má rád ledový čaj a druhý student nemá rád ledový čaj)
$= P$(první student má rád ledový čaj)
$\cdot P$(druhý student nemá rád ledový čaj | první student má rád ledový čaj)
$= (0.35) \cdot (0.6842) = 0.2395$

Výpočet podmíněné pravděpodobnosti

Máme-li dva jevy A a B (za předpokladu, že $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$), pak platí

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ a zároveň } B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

a

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ a zároveň } B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Příklad 14

Zadání: Pravděpodobnost, že náhodně vybraný student z vysoké školy je ve čtvrtém ročníku, je 0,20. Průnik pravděpodobnosti, že student je hlavním oborem informatik a je ve čtvrtém ročníku, je 0,03. Určete podmíněnou pravděpodobnost, že náhodně vybraný student je hlavním oborem informatik za předpokladu, že je ve čtvrtém ročníku.

Řešení:

Na základě daných informací:

$P(\text{čtvrťák}) = 0.20 \quad \text{a} \quad P(\text{čtvrťák} \cap \text{hlavní obor informatika}) = 0.03$

Takže hledaná podmíněná pravděpodobnost je:

$$P(\text{hlavní obor informatika}|\text{čtvrťák}) = \frac{P(\text{čtvrťák} \cap \text{hlavní obor informatika})}{P(\text{čtvrťák})} = \frac{0.03}{0.20} = 0.15$$

Společná pravděpodobnost u neslučitelných jevů

Společná pravděpodobnost nastání dvou neslučitelných jevů je vždy nulová. Pokud jsou A a B dva neslučitelné jevy, pak

$$P(A \text{ a zároveň } B) = P(A \cap B) = 0$$

Příklad 15

Zadání: Zvažte dva následující jevy popisující výsledek žádosti na získání osobního úvěru na automobil:

A = jev, popisující že je žádost o úvěr schválena

R = jev, popisující že je žádost o úvěr zamítnuta

Jaká je pravděpodobnost, že jevy A a R nastanou zároveň?

Řešení: Tyto dva jevy A a R se navzájem vylučují, jsou tedy neslučitelné. Buď bude žádost o úvěr schválena, nebo bude zamítnuta. Tedy P(A a zároveň R) = 0.

Sjednocení jevů

Máme jevy A a B definované ve výběrovém prostoru.

Sjednocení jevů A a B je soubor všech výsledků, které patří buď k A, nebo k B, nebo současně k A a B a označuje se $(A \text{ nebo } B) = (A \cup B)$.

Pravděpodobnost sjednocení dvou **slučitelných** jevů A a B je

$$P(A \text{ nebo } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ a zároveň } B)$$

Pravděpodobnost sjednocení dvou **neslučitelných** jevů A a B je

$$P(A \text{ nebo } B) = P(A) + P(B)$$

Příklad 16

Zadání: V skupině 2500 osob je 1400 žen a 600 vegetariánů. Z 600 vegetariánů je 400 žen vegetariánek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z této skupiny je muž nebo vegetarián?

	Vegetarián	Není Vegetarián	Celkem
Muž	200	900	1100
Žena	400	1000	1400
Celkem	600	1900	2500

Příklad 16: Řešení

Ze zadaných informací víme

$P(\text{muž}) = \frac{1100}{2500} = 0.44$

$P(\text{vegetarián}) = \frac{600}{2500} = 0.24$

$P(\text{muž a zároveň vegetarián}) = \frac{200}{2500} = 0.08$

Použitím pravidla sčítání dostáváme

$P(\text{muž nebo vegetarián})$

$= P(\text{muž}) + P(\text{vegetarián}) - P(\text{muž a zároveň vegetarián})$

$= 0.44 + 0.24 - 0.08 = 0.60$

Příklad 17

Zadání: Zvažte experiment s jedním hodem kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo menší než 3 nebo číslo větší než 4?

Příklad 17: Řešení

Jev *číslo menší než 3* nastane, pokud padne na kostce buď 1 nebo 2, a jev *číslo větší než 4* nastane, pokud na kostce padne buď 5 nebo 6. Tyto dva jevy jsou navíc navzájem neslučitelné (jelikož nemají žádný společný výsledek a nemohou nastat současně). Tedy jejich pravděpodobnost průniku je nula.

$$P(\text{číslo menší než 3}) = 2/6$$

$$P(\text{číslo větší než 4}) = 2/6$$

Pravděpodobnost sjednocení těchto dvou jevů je:

$$P(\text{číslo menší než 3 nebo číslo větší než 4}) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - 0 = 0.6667$$

Experiment, výsledek experimentu a výběrový prostor

Pravděpodobnost

Marginální a podmíněná pravděpodobnost

Průnik jevů a pravidlo násobení

Sjednocení jevů a pravidlo sčítání

Počet možných výsledků, faktoriál, kombinace a permutace

Pravidlo pro počítání celkového počtu výsledků

Pokud experiment sestává ze tří kroků a první krok může mít m výsledků, druhý krok n výsledků a třetí krok k výsledků, pak celkový počet výsledků experimentu je $m \cdot n \cdot k$.

Příklad: Zvažte tři hody mincí. Kolik celkových výsledků tento experiment má?

Řešení: Tento experiment hodu mincí třikrát má tři kroky: první hod, druhý hod a třetí hod. Každý krok má dvě možnosti výsledku: panna a orel. Takže, celkový počet výsledků pro tři hody mincí = $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Osm výsledků tohoto experimentu jsou:
{ HHH, HHO, HOH, HOO, OHH, OHO, OOH a OOO }

Faktoriál

Symbol $n!$, čtený jako **n faktoriál**, představuje součin všech celých čísel od n do 1. Jinými slovy,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Podle definice,

$$0! = 1$$

Příklady:

$$\begin{aligned}
7! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 && = 5040 \\
10! &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 && = 3\,628\,800 \\
(12-4)! &= 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 && = 40\,320 \\
(5-5)! &= 0! && = 1
\end{aligned}$$

Kombinace

Kombinace udávají počet způsobů, jak lze vybrat x prvků z n prvků. Notace používaná k označení celkového počtu kombinací je C_x^n nebo $\binom{n}{x}$ což se čte jako „počet kombinací n prvků vybraných po x kusech".

Počet kombinací pro výběr x z n různých prvků je dán vzorcem

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

kde $n!$, $x!$ a $(n-x)!$ se čtou jako „n faktoriál", „x faktoriál", „n minus x faktoriál".

Příklad 18

Zadání: Tři členové komise budou náhodně vybráni z pěti lidí. Kolik různých kombinací je možných?

Řešení: $n = 5$ a $x = 3$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

Permutace

Permutace dávají celkový počet výběrů x prvku z n (různých) prvků tak, že je důležité pořadí výběrů. Notace používaná k označení permutací je P_x^n což se čte jako „počet permutací při výběru x prvků z n prvků“. Permutace jsou také nazývány **uspořádání**.

Počet permutací nebo uspořádání při výběru x prvků z n prvků je dán jako

$$P_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}.$$

Poznamenejme, že zde musí být všechny prvky n rozdílné.

Rozdíly v terminologii: Permutace vs. Variace

1. Klasická definice (běžně v Česku a střední Evropě)

- **Permutace:** uspořádané uspořádání všech prvků ($P(n) = n!$).
- **Variace:** uspořádaný výběr části prvků ($V(n,x) = \frac{n!}{(n-x)!}$).

2. Terminologie v některých zahraničních knihách (např. Mann)

- **Permutations** někdy označují i variace, tedy uspořádaný výběr x prvků z n, což odpovídá našemu vzorci pro variace bez opakování:

$$P(n,x) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

- To, co my nazýváme **permutací všech prvků**, někdy označují jako *"permutations of all n elements"*.

Příklad 19

Zadání: Klub má 5 členů. Mají na příští rok zvolit tři úředníky předsedu, tajemníka a pokladníka. Tyto úředníky vždy vybírají náhodným výběrem tří jmen ze všech členů. První vybraná osoba se stává předsedou, druhá tajemníkem a třetí přebírá funkci pokladníka. Pořadí, ve kterém jsou vybrána 3 jména ze 5, je tedy důležité. Najděte celkový počet uspořádání 3 jmen z těchto 5 osob.

Řešení:

n = celkový počet členů klubu = 5

x = počet jmen k výběru = 3

$$P_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 60$$

Existuje 60 permutací nebo uspořádání pro výběr 3 jmen ze 5.

Shrnutí přednášky:

Experiment, výsledek experimentu a výběrový prostor

Pravděpodobnost

Marginální a podmíněná pravděpodobnost

Průnik jevů a pravidlo násobení

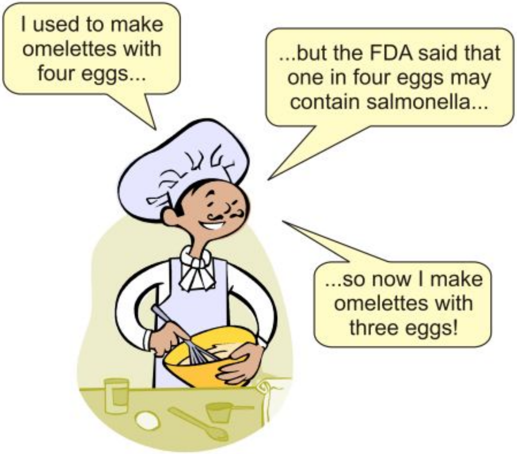
Sjednocení jevů a pravidlo sčítání

Počet možných výsledků, faktoriál, kombinace a permutace

Co si nastudovat na následující týden?

Příprava na cvičení:	Leaflet 05 Koncepty a procedury, cv. 05, kap. 04
Povinná literatura:	Mann (2016, 2024), Kapitola 5

Děkuji za pozornost!



Source: Pinterest