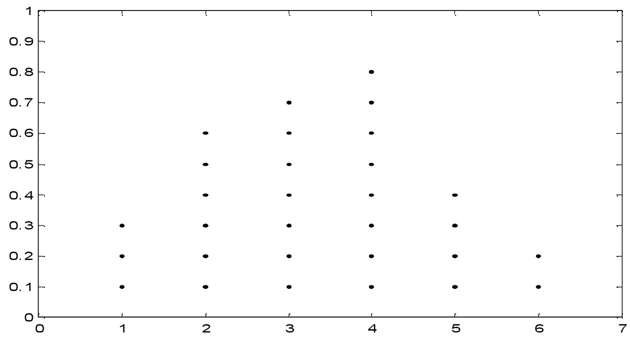
Řešení písemné zkoušky 10.2.2006

Příklad 1.: Byl zjišťován počet obyvatel (znak X) ve 30 bytech. Výsledky: 3 2 4 5 2 2 3 2 4 5 1 3 4 4 5 4 1 3 6 2 3 4 6 2 3 4 1 3 5 4. Pro tento znak

a) sestrojte jednorozměrný tečkový diagram (Návod:definice 2.2., příklad 2.3.) (0,5 bodu)
b) sestavte variační řadu (Návod:definice 2.4., příklad 2.5.) (1 bod)
c) sestrojte graf četnostní funkce a empirické distribuční funkce (Návod:definice 2.4., příklad 2.5.) (1 bod)
d) vypočtěte průměr, medián a kvartilovou odchylku (Návod: definice 3.20., definice 3.4., příklad 3.5.) (1,5 bodu)

Řešení:

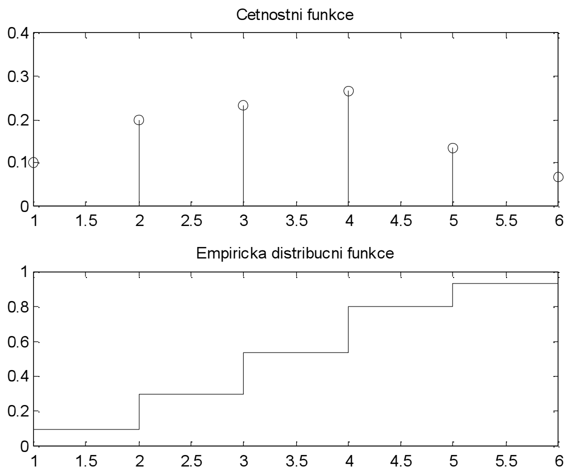
ad a)



ad b)

$x_{[j]}$	n_j	p_j	N_j	F_j
1	3	3/30	3	3/30
2	6	6/30	9	9/30
3	7	7/30	16	16/30
4	8	8/30	24	24/30
5	4	4/30	28	28/30
6	2	2/30	30	1
x	30	1	x	x

ad c)



ad d) m = 3,3333, medián = 3, dolní kvartil = 2, horní kvartil = 4, kvartilová odchylka = 2

Příklad 2.: Firma investovala do tří nezávislých projektů. Pravděpodobnost zisku z těchto projektů je 0,4, 0,5 a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že firma bude mít zisk

a) právě jedenkrát (jev A) (1 bod)
b) alespoň jedenkrát (jev B) (0,5 bodu)
c) právě dvakrát (jev C) (1 bod)
d) aspoň dvakrát (jev D) (0,5 bodu)
e) ze všech tří projektů (jev E) (0,5 bodu)
f) ze žádného projektu? (jev F) (0,5 bodu)

Řešení:

Označme A_i jev, že firma bude mít zisk z i-tého projektu, i = 1, 2, 3.

ad a)

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 10^{-3}(60+90+210) = 0{,}36$$

ad b)

$$P(B) = 1 - P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$$

ad c)

$$P(C) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) + P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 10^{-3}(60+140+210) = 0{,}41$$

ad d)

$$P(D) = P(C) + P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(C) + P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0{,}41 + 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 =$$
$$= 0{,}41 + 0{,}14 = 0{,}55$$

ad e)

$$P(E) = P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}14$$

ad f)

$$P(F) = P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}09$$

Příklad 3.: Měřením délky deseti válečků byly získány hodnoty (v mm): 5,38 5,36 5,35 5,40 5,41 5,34 5,29 5,43 5,42 5,32. Pro úsporu času máte uveden aritmetický průměr m = 5,37 mm a směrodatnou odchylku s = 0,044 mm. Těchto deset hodnot považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 10 z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ.(Návod: věta 12.9. (b)) (1,5 bodu)
b) Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou směrodatnou odchylku σ. (Návod: věta 12.9. (c)) (1,5 bodu)
c) Na hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že střední hodnota délky válečků je 5,3 mm proti oboustranné alternativě. (Návod: poznámka 13.5. (b) (1 bod)

Řešení:

ad a)

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1) = 5{,}37 - \frac{0{,}044}{\sqrt{10}}\, t_{0{,}995}(9) = 5{,}37 - \frac{0{,}044}{\sqrt{10}}\, 3{,}25 = 5{,}3248$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1) = 5{,}37 + \frac{0{,}044}{\sqrt{10}}\, t_{0{,}995}(9) = 5{,}37 + \frac{0{,}044}{\sqrt{10}}\, 3{,}25 = 5{,}4152$$

5,3248 mm < μ < 5,4152 mm s pravděpodobností aspoň 0,99

ad b)

$$d = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}044^2}{\chi^2_{0{,}995}(9)}} = \frac{3 \cdot 0{,}044}{\sqrt{23{,}589}} = 0{,}0272$$

$$h = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}044^2}{\chi^2_{0{,}005}(9)}} = \frac{3 \cdot 0{,}044}{\sqrt{1{,}735}} = 0{,}1002$$

0,0272 mm $< \sigma <$ 0,1002 mm s pravděpodobností aspoň 0,99.

ad c) Testujeme H_0: $\mu = 5{,}3$ proti H_1: $\mu \neq 5{,}3$ na hladině významnosti 0,01. Protože 99% empirický interval spolehlivosti vypočtený v bodě (a) neobsahuje hodnotu 5,3, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01 a přijímáme alternativní hypotézu.