

Řešení písemné zkoušky 8. 1. 2006

Příklad 1.: Je dán datový soubor 12 1,1 6,3 3,9 11 5,8 2,5 8 4,1 2 9,5 6,6 1,7 3,4 4,9 3 10,3 2,2 5,4 15,5. Stanovíme třídící intervaly $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 7)$, $(7, 11)$, $(11, 16)$.

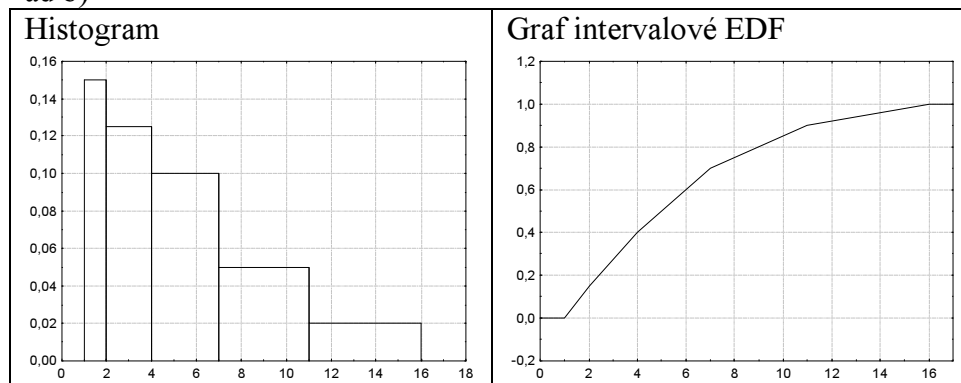
- Sestavte tabulku rozložení četností. (1,5 bodu)
- Nakreslete histogram a graf intervalové empirické distribuční funkce. (1,5 bodu)
- Stanovte medián datového souboru. (0,2 bodu)
- Vypočtete průměr datového souboru. (0,8 bodu)

Řešení:

ad a)

(u_j, u_{j+1})	$x_{[j]}$	d_j	n_j	p_j	N_j	F_j	f_j
$(1, 2)$	1,5	1	3	$3/20=0,15$	3	$3/20=0,15$	$3/20=0,15$
$(2, 4)$	3	2	5	$5/20=0,25$	8	$8/20=0,4$	$5/40=0,125$
$(4, 7)$	5,5	3	6	$6/20=0,3$	14	$14/20=0,7$	$6/60=0,1$
$(7, 11)$	9	4	4	$4/20=0,2$	18	$18/20=0,9$	$4/80=0,05$
$(11, 16)$	13,5	5	2	$2/20=0,1$	20	$20/20=1$	$2/100=0,02$

ad b)



ad c) Medián je průměr 10. a 11. uspořádané hodnoty, tedy $x_{0,50} = (4,9 + 5,4)/2 = 5,15$

$$m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r n_j x_{[j]} = \frac{1}{20} (3 \cdot 1,5 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5,5 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 13,5) = \frac{1}{20} 115,5 = 5,775$$

nebo $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 5,96$

Příklad 2.: Provedeme tři nezávislé pokusy, v nichž sledujeme nastoupení úspěchu. V prvním pokusu nastává úspěch s pravděpodobností 0,5, ve druhém pokusu s pravděpodobností 0,2 a ve třetím pokusu s pravděpodobností 0,1.

- Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X , která udává počet úspěchů v těchto třech pokusech a nakreslete její graf (2 body)
- Vypočtete střední hodnotu náhodné veličiny X . (0,5 bodu)
- Vypočtete rozptyl náhodné veličiny X . (1 bod)
- Jaká je pravděpodobnost, že nastane aspoň jeden úspěch? (0,5 bodu)

Řešení:

ad a) Označme X_i počet úspěchů v i -tém pokusu, $i = 1, 2, 3$. X_i nabývá hodnot 0,1.
 X nabývá hodnot 0, 1, 2, 3.

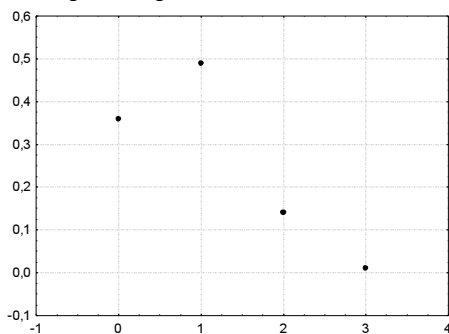
$$\begin{aligned}\pi(0) &= P(X=0) = P((X_1=0 \wedge X_2=0 \wedge X_3=0)) = P(X_1=0) \cdot P(X_2=0) \cdot P(X_3=0) = \\ &= 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(1) &= P(X=1) = \\ &= P((X_1=1 \wedge X_2=0 \wedge X_3=0) \vee (X_1=0 \wedge X_2=1 \wedge X_3=0) \vee (X_1=0 \wedge X_2=0 \wedge X_3=1)) = \\ &= P(X_1=1) \cdot P(X_2=0) \cdot P(X_3=0) + P(X_1=0) \cdot P(X_2=1) \cdot P(X_3=0) + \\ &+ P(X_1=0) \cdot P(X_2=0) \cdot P(X_3=1) = \\ &= 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,36 + 0,09 + 0,04 = 0,49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(2) &= P(X=2) = \\ &= P((X_1=1 \wedge X_2=1 \wedge X_3=0) \vee (X_1=1 \wedge X_2=0 \wedge X_3=1) \vee (X_1=0 \wedge X_2=1 \wedge X_3=1)) = \\ &= P(X_1=1) \cdot P(X_2=1) \cdot P(X_3=0) + P(X_1=1) \cdot P(X_2=0) \cdot P(X_3=1) + \\ &+ P(X_1=0) \cdot P(X_2=1) \cdot P(X_3=1) = \\ &= 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,09 + 0,04 + 0,01 = 0,14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(3) &= P(X=3) = \\ &= P(X_1=1 \wedge X_2=1 \wedge X_3=1) = P(X_1=1) \cdot P(X_2=1) \cdot P(X_3=1) = 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,01\end{aligned}$$

Graf pravděpodobnostní funkce



$$\text{ad b) } E(X) = 0 \cdot 0,36 + 1 \cdot 0,49 + 2 \cdot 0,14 + 3 \cdot 0,01 = 0,8$$

$$D(X) = 0^2 \cdot 0,36 + 1^2 \cdot 0,49 + 2^2 \cdot 0,14 + 3^2 \cdot 0,01 - 0,8^2 = 1,14 - 0,64 = 0,5$$

$$\text{ad c) } P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \pi(0) = 1 - 0,36 = 0,64$$

Příklad 3.: Při kontrole pěti balíčků cukru o deklarované hmotnosti 1000 g byly zjištěny tyto odchylky: -1, 2, -2, 3, 1. Považujeme je za realizace náhodného výběru rozsahu 5 z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Vypočítejte realizaci m výběrového průměru M a realizaci s^2 výběrového rozptylu S^2 . (1 bod)

b) Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ . (1 bod)

c) Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro neznámou směrodatnou odchylku σ . (1 bod)

d) Na hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že střední hodnota odchylek je nulová proti oboustranné alternativě. (1 bod)

Řešení:

$$\text{ad a) } m = 0,6, s^2 = 4,3$$

$$\text{ad b) } d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 0,6 - \frac{\sqrt{4,3}}{\sqrt{5}} t_{0,995}(4) = 0,6 - \frac{\sqrt{4,3}}{\sqrt{5}} \cdot 4,6041 = -3,67, h = 4,87$$

$-3,67 < \mu < 4,87$ s pravděpodobností 0,99

$$\text{ad c) } d = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,3}{\chi^2_{0,975}(4)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,3}{11,1433}} = \sqrt{1,5435} = 1,24$$

$$h = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,3}{\chi^2_{0,025}(4)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,3}{0,4844}} = \sqrt{35,5065} = 5,96$$

$1,24 < \sigma < 5,96$ s pravděpodobností 0,95

ad d) Protože 99% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu obsahuje 0, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,01.