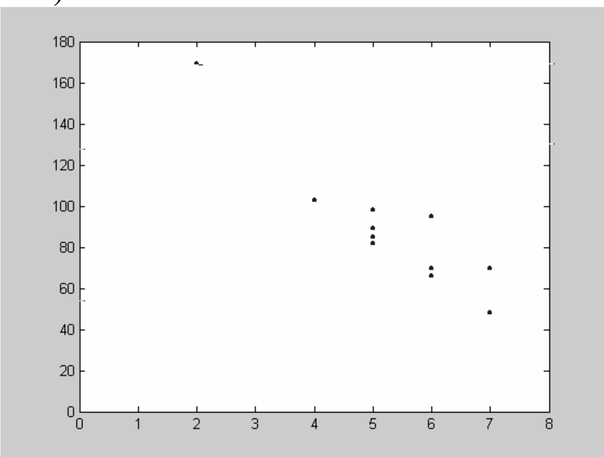
Řešení písemné práce 18.2.2006

Příklad 1.: U 11 náhodně vybraných aut jisté značky bylo zjišťováno jejich stáří (znak X – v letech) a cena (znak Y – v tisících Kč). Výsledky: (5, 85), (4, 103), (6, 70), (5, 82), (5, 89), (5, 98), (6, 66), (6, 95), (2, 169), (7, 70), (7, 48). Pro úsporu času máte uvedeny číselné charakteristiky (zaokrouhlené na dvě desetinná místa): $m_1 = 5{,}28$, $m_2 = 88{,}63$, $s_1^2 = 2{,}02$, $s_2^2 = 970{,}85$, $s_{12} = -40{,}89$.

a) Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram a s jeho pomocí posuďte, zda závislost Y na X lze uspokojivě popsat regresní přímkou. (1 bod) Návod: viz př. 2.3.(e), př. 4.4.(b)
b) Vypočtěte koeficient korelace a interpretujte ho. (1 bod) Návod: viz poznámka 3.17.
c) Najděte rovnici regresní přímky znaku Y na znak X. (1 bod) Návod: viz věta 4.3.
d) Jaký je regresní odhad ceny auta, které je staré 3 roky? (1 bod) Návod: viz př. 4.4.(d)

Řešení:
ad a)



ad b) $r_{12} = -0{,}92$. Mezi znaky X a Y existuje silná nepřímá lineární závislost. Čím starší auto, tím nižší cena.
ad c) $y = 195{,}31 - 20{,}24x$
ad d) $y = 195{,}31 - 3.20{,}24 = 134{,}59$

Příklad 2.: Dlouhodobé zkušenosti s výsledky testu z matematiky na střední škole opravňují učitele k tomu, aby počet bodů v testu dosažených považoval za náhodnou veličinu X s rozložením $N(\mu,\sigma^2)$. Učitel se rozhodl, že bude test známkovat podle následujících pravidel:
výborně, když $X > \mu + \sigma$,
chvalitebně, když $\mu < X \leq \mu + \sigma$,
dobře, když $\mu - \sigma < X \leq \mu$,
dostatečně, když $\mu - 2\sigma < X \leq \mu - \sigma$,
nedostatečně, když $X \leq \mu - 2\sigma$.
Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student ze skupiny zkoušených studentů bude ohodnocen známkou

a) výborně (0,6 bodu)
b) chvalitebně (0,6 bodu)
c) dobře (0,6 bodu)
d) dostatečně (0,6 bodu)
e) nedostatečně? (0,6 bodu)

Rozložení počtu bodů s hranicemi pro jednotlivé známky znázorněte na obrázku. (1 bod)
Návod: příklad 8.9., příklad 4. na straně 100, obrázek vlevo nahoře na straně 96.

Řešení:
ad a)

$$P(X > \mu + \sigma) = 1 - P(X \le \mu + \sigma) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \le \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) = 1 - P(U \le 1) = 1 - \Phi(1) =$$

$$= 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$$

ad b)

$$P(\mu < X \le \mu + \sigma) = P(0 < U \le 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}84134 - 0{,}5 = 0{,}34134$$

ad c)

$$P(\mu - \sigma < X \le \mu) = P(-1 < U \le 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(0) - 1 = 0{,}5 + 0{,}84134 - 1 = 0{,}34134$$

ad d)

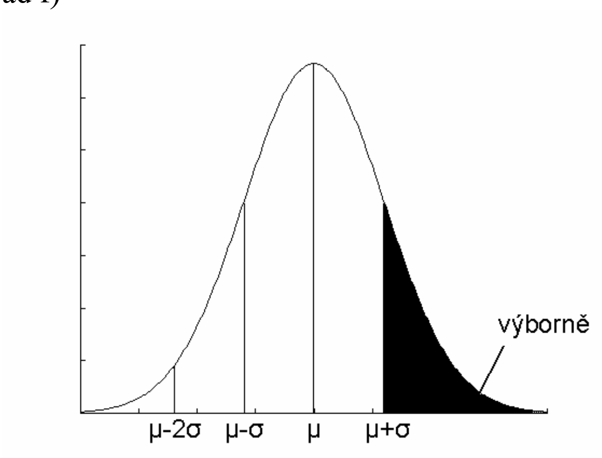
$$P(\mu - 2\sigma < X \le \mu - \sigma) = P(-2 < U \le -1) = \Phi(-1) - \Phi(-2) = 1 - \Phi(1) - 1 + \Phi(2) - 1 = \Phi(2) - \Phi(1) =$$

$$= 0{,}97725 - 0{,}84134 = 0{,}13591$$

ad e)

$$P(X \le \mu - 2\sigma) = P(U \le -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$$

ad f)



Příklad 3.: Při kontrolních zkouškách životnosti 16 žárovek byl stanoven odhad m = 3000 h střední hodnoty jejich životnosti a odhad s = 20 h směrodatné odchylky jejich životnosti. Za předpokladu, že životnost žárovky se řídí normálním rozložením, vypočtěte

a) 99% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu životnosti (1 bod)
b) 99% empirický interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku životnosti (1 bod)
c) 90% levostranný empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu životnosti (1 bod)
d) 95% pravostranný empirický interval spolehlivosti pro rozptyl životnosti.(1 bod)

Návod: věta 12.9., příklad 12.8. – konkrétní aplikace

Upozornění: Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo a vyjádřete v hodinách a minutách.

Řešení:
ad a)

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0{,}995}(n-1) = 3000 - \frac{20}{\sqrt{16}} 2{,}9467 = 2985{,}3\,,\ h = 3014{,}7$$

2985 h a 18 min < μ < 3014 h a 42 min s pravděpodobností aspoň 0,99

ad b)

$$d = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0{,}995}(n-1)}} = \frac{\sqrt{15} \cdot 20}{\sqrt{32{,}801}} = 13{,}5\,,\ h = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0{,}005}(n-1)}} = \frac{\sqrt{15} \cdot 20}{\sqrt{4{,}601}} = 36{,}1$$

13 h a 30 min < σ < 36 h a 6 min s pravděpodobností aspoň 0,99

ad c)

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,9}(n-1) = 3000 - \frac{20}{\sqrt{16}} 1{,}3406 = 2993{,}3$$

2993 h a 18 min < μ s pravděpodobností aspoň 0,9

ad d)

$$h = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,05}(n-1)} = \frac{15 \cdot 400}{7{,}261} = 826{,}3$$

826 h^2 a 18 min^2 > σ^2 s pravděpodobností aspoň 0,95

Hodnocení

$(10,12\rangle$ … A, $(9,10\rangle$ … B, $(8,9\rangle$ … C, $(7,8\rangle$ … D, $\langle 6,7\rangle$ …E, $\langle 0,6)$ … F