Vzorová písemná práce

Příklad 1.: Při statistickém šetření pojištěnců byly získány tyto výše pojistek (v Kč):

Výše pojistky	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570
Počet pojištěnců	7	10	14	22	25	12	3	3	2	2

a) Nakreslete graf četnostní funkce. (1 bod)
b) Zjistěte průměr, medián a modus výše pojistky. (1,5 bodu)
c) Vypočtěte rozptyl, směrodatnou odchylku a koeficient variace výše pojistky. (1,5 bodu)

Příklad 2.: Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodu, je náhodná veličina X. Dlouhodobým sledováním bylo zjištěno, že X nabývá hodnot 0, 1, 2, 3, 4 s pravděpodobnostmi 0,25, 0,55, 0,11, 0,07 a 0,02.

a) Najděte distribuční funkci náhodné veličiny X a nakreslete její graf. (1,5 bodu)
b) Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X.(1 bod)
c) Vypočtěte rozptyl náhodné veličiny X. (1,5 bodu)

Příklad 3.: U jistého měřicího zařízení má být posouzena jeho přesnost. Proto na něm byla nezávisle změřena délka téhož výrobku. Výsledky měření v cm byly: 15,15; 15,20; 15,04; 15,14; 15,22. Předpokládáme, že tyto výsledky jsou číselné realizace náhodného výběru rozsahu 5 z rozložení N(μ, σ^2).

a) Vypočtěte realizaci výběrového průměru, výběrového rozptylu a výběrové směrodatné odchylky. (1,5 bodu)
b) Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ (1 bod)
c) Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2 a pro směrodatnou odchylku σ. (1,5 bodu)

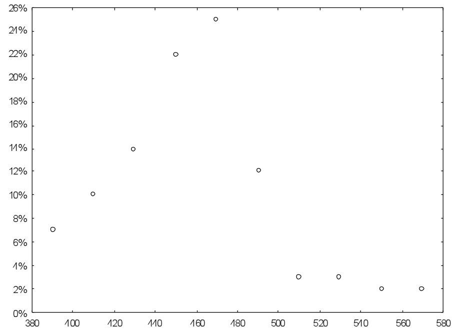
Hodnocení písemky

(10, 12] … A
(9, 10] …... B
(8, 9] ……. C
(7, 8] ……. D
[6, 7] ……. E
[0, 6) ……. F

Řešení vzorové písemné práce

Řešení příkladu 1.:

ad a) Graf četnostní funkce



ad b) Použijeme vzorec pro vážený aritmetický průměr. Rozsah souboru:
n = 7 + 10 + … + 2 = 100.

$$m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_{[j]} = \frac{1}{100}\left(7\cdot 390 + 10\cdot 410 + \ldots + 2\cdot 570\right) = 457{,}4$$

Datový soubor má sudý rozsah, tedy medián je průměr dvou prostředních hodnot uspořádaného datového souboru, tj. průměr 50. a 51. uspořádané hodnoty, tedy 450. Modus je nejčetnější varianta znaku, tj. 470.

ad c) Rozptyl vypočteme podle vzorce pro vážený rozptyl.

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j (x_{[j]} - m)^2 =$$

$$\frac{1}{100}\left[7\cdot\left(390 - 457{,}4\right)^2 + 10\cdot\left(410 - 457{,}4\right)^2 + \ldots + 2\cdot\left(570 - 457{,}4\right)^2\right] = 1493{,}24$$

Směrodatná odchylka $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1493{,}24} = 38{,}64$

Koeficient variace $\frac{s}{m} = \frac{38{,}64}{457{,}4} = 0{,}08$

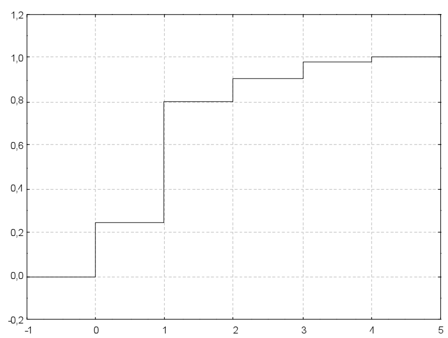
Řešení příkladu 2.:

ad a)

$$x \in \left(-\infty, 0\right): \Phi(x) = 0, x \in \langle 0, 1\right): \Phi(x) = 0{,}25, x \in \langle 1, 2\right): \Phi(x) = 0{,}8, x \in \langle 2, 3\right): \Phi(x) = 0{,}91,$$

$$x \in \langle 3, 4\right): \Phi(x) = 0{,}98, x \in \langle 4, \infty\right): \Phi(x) = 1$$

Graf:



ad b)

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\pi(x) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}55 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}07 + 4 \cdot 0{,}02 = 1{,}06$$

ad c)

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 =$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2\pi(x) - [E(X)]^2 = 0^2 \cdot 0{,}25 + 1^2 \cdot 0{,}55 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}07 + 4^2 \cdot 0{,}02 - 1{,}06^2 = 0{,}8164$$

Řešení příkladu 3.:

ad a) $m = 15{,}15$, $s^2 = 0{,}0049$, $s = 0{,}07$

ad b) Ve statistických tabulkách najdeme $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0,975}(4) = 2{,}7764$. Po dosazení do vzorců pro dolní a horní mez dostaneme

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1) = 15{,}15 - \frac{0{,}07}{\sqrt{5}}\, 2{,}7764 = 15{,}06$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha/2}(n-1) = 15{,}15 + \frac{0{,}07}{\sqrt{5}}\, 2{,}7764 = 15{,}24.$$

Tedy 15,06 cm < μ < 15,24 cm s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) Ve statistických tabulkách najdeme $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,975}(4) = 11{,}143$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,025}(4) = 0{,}484$. Po dosazení do vzorců pro dolní a horní mez dostaneme

$$d = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} = \frac{4 \cdot 0{,}0049}{11{,}143} = 0{,}0018, \quad h = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} = \frac{4 \cdot 0{,}0049}{0{,}484} = 0{,}0405$$

Tedy 0,0018 cm^2 < σ^2 < 0,0405 cm^2 s pravděpodobností aspoň 0,95.