```
Tato sbírka příkladů je určena pro posluchače
předmětu Matematika 1 (PMMATI) v denním studiu na ESF
Může však být použita i v kombinovaném studiu jako
doplňkový materiál k předmětu Matematika A (KMMATA).
```

1. Řešte v **R** následující nerovnice:

a) $x^2 - 6x + 9 > 0$ **b)** $x^2 - 4 < 0$ **c)** $|x+1| \le 6$

d) $\dfrac{|5-2x|}{x+2} > -3$ **e)** $|x^2 - 2x - 3| < 3(x-1)$

f) $|x^2 - 4x| + 3 > x^2 + |x-5|$

2. Ukažte graficky, že soustava nerovnic $x + y \le 3$, $2x - y \ge 0$, $x + 2y \ge 5$ má jediné řešení.

3. Napište negace výroků:

a) Žádné auto není modré nebo aspoň jedno auto je bílé.
b) Žádný člověk není bez chyby a každý člověk se může mýlit.
c) Bude-li pršet, půjdu do kina nebo do divadla.
d) Aspoň dva lidé odešli.
e) Pro každý trojúhelník ABC platí, že průsečík os jeho stran splývá s průsečíkem os jeho vnitřních úhlů.
f) $\forall x \in \mathbf{N} : \exists y \in \mathbf{N} : y^x = y$

4. Rozhodněte o správnosti úsudku ve známé písničce: *„Kdyby byl Bavorov, co jsou Vodňany, dal bych Ti hubiček na obě strany. Ale že je za vodou, za vodičkou studenou, nedám Ti má milá ani jedinou.“*

5. Dokažte, že následující výroky jsou tautologie:

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ **b)** $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

6. Na základě výrokové logiky ověřte, zda následující úsudek je správný **:**
Viníkem je Petr nebo Pavel. Je-li viníkem Petr, pak Pavel nebyl v 11 hodin na místě činu. Je-li viníkem Pavel, pak je jasný motiv činu.Tedy, jestliže byl Pavel v 11 hodin na místě činu, pak je jasný motiv činu.

7. Rozhodněte, zda vektory

a) **u** = (1,1,1,1) , **v** = (1,2,1,1) , **w** = (2,3,3,3) , **t** = (1,2,3,4)
b) **u** = (1,2,3,4) , **v** = (1,1,1,1) , **w** = (2,3,3,3) , **t** = (2,2,1,0)

jsou ve V_4 lineárně závislé či nezávislé.

8. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq V_n$ je podprostorem vektorového prostoru V_n :

a) $W = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) | x_1, x_2, ... x_n \in \mathbf{Z} \}$ **b)** $W = \{ (r, 2r, ..., nr) | r \in \mathbf{R} \}$

9. Najděte všechna r∈ **R**, pro která je vektor **t** = (r,1,2) lineární kombinací vektorů **u** = (1,2,-1), **v** = (1,1,0), **w** = (2,-1,3)

10. Vektory **u** , **v** , **w** tvoří bázi vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda též vektory 2**u** + **v** + 3**w** , **v** + 2**w** , 3**u** – **v** + 7**w** tvoří bázi ve V.

11. Rozhodněte, zda všechny lineární kombinace vektorů

a) **u** = (1,2,1,2) , **v** = (2,1,2,1) , **w** = (1,1,1,1) , **t** = (-2,0,-1,-3) , **s** = (-1,1,0,-2)
b) **u** = (-1,1,0,-1) , **v** = (2,0,1,3) , **w** = (1,2,3,4) , **t** = (2,3,4,6) , **s** = (1,-3,5,-7)

tvoří vektorový prostor V_4 .

12. Ve vektorovém prostoru V_4 určete bázi, která obsahuje vektor **u** = (1,2,3,4).

13. a) Ve vektorovém prostoru V_4 je podprostor W tvořen všemi lineárními kombinacemi vektorů **a** = (1,1,0,1) , **b** = (1,0,0,1) , **c** = (2,-1,0,0,) , **d** = (1,0,0,0) **.** Určete dimenzi a jednu z bází podprostoru W.

b) Ve vektorovém prostoru V_5 je podprostor W tvořen všemi lineárními kombinacemi vektorů **a** = (1,1,0,1,1) , **b** = (0,1,1,-1,2) , **c** = (1,-1,1,0,1,) , **d** = (1,2,1,0,3) a **e** = (2,1,2,0,4). Určete dimenzi a jednu z bází podprostoru W.

14. Určete hodnost matice **A** :

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -8 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & -1 & 5 \\ 10 & 22 & 8 & -18 & 10 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 13 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **d)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

15. Vypočtěte součin matic $\underline{\mathbf{A}}.\underline{\mathbf{B}}$, je-li

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, **d)** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

16. Vypočtěte $(3.\mathbf{A} + \mathbf{B}^T).\mathbf{C}^T$, je-li

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & -2 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

17. Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Určete libovolnou matice **B** tak, aby matice **A**.**B** nebyla definována a matice **B**.**A** byla definována. Součin **B**.**A** spočtěte.

18. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 9 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

19. Užitím Cramerova pravidla řešte soustavu lineárních rovnic:

a) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$

20. Řešte soustavu lineárních rovnic:

a) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$ **, b)** $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 11 \end{aligned}$ **, c)** $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$ **, e)** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 11 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 4 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 5x_5 &= 5 \end{aligned}$

21. Oběma způsoby výpočtu určete matici inverzní k matici **A** :

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

22. Jordanovou metodou určete matici inverzní k matici **A** :

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

23. Řešte maticovou rovnici: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

24. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice **A**:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

25. Určete definiční obor funkce

a) $f(x) = \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$, **b)** $f(x) = \sqrt{-x.\cos^2 \frac{\pi x}{2}}$, **c)** $f(x) = \sqrt{-\ln(x^2 + 5x + 5)}$ **.**

1. a) $x \in \mathbf{R} - \{3\}$ **b)** $x \in (-2;2)$ **c)** $x \in \langle -7;5 \rangle$ **d)** $x \in (-\infty;-11) \cup (-2;\infty)$

e) $x \in (2;5)$ f) $x \in (-\infty;-2/3) \cup (1/2;2)$

2. Všechny tři hraniční přímky daných polorovin se protínají v bodě Q=[1;2] a z grafu je patrné, že bod Q je jediným společným bodem daných tří polorovin.

3. a) Aspoň jedno auto je modré a žádné auto není bílé.

b) Aspoň jeden člověk je bez chyby nebo aspoň jeden člověk se nikdy nemýlí.

c) Bude pršet a nepůjdu ani do kina ani do divadla.

d) Odešel nejvýše jeden člověk.

e) Existuje aspoň jeden trojúhelník, ve kterém průsečík os stran nesplývá s průsečíkem os vnitřních úhlů.

f) $\exists x \in \mathbf{N}: \forall y \in \mathbf{N}: y^x \neq y$

4. Úsudek je nesprávný.

6. Označíme výroky takto: P: viníkem je Petr , Q: viníkem je Pavel , R: Pavel nebyl v 11 hodin na místě činu , S : je jasný motiv činu . Úsudek vyjádříme výrokovou formulí: V: $[(P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow S)] \Rightarrow (\neg R \Rightarrow S)$ a ukážeme, že V je tautologie.

7. a) jsou lineárně nezávislé **b)** jsou lineárně závislé

8. a) není **b)** je

9. r = 3

10. ano

11. a) ne **b)** ano

12. např. **u** , (1,0,0,0) , (0,1,0,0) , (0,0,1,0)

13. a) dimW = 3, báze je např. **a** , **b** , **c**

b) dimW = 3, báze je např. **a** , **b** , **c**

14. a) 2 **b)** 3 **c)** 3 **d)** 3

15. a) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ **, b)** $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ **,c)** $\begin{pmatrix} 15 & -1 & -4 & -4 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 9 & 1 & 4 & 10 & 16 \\ 30 & 9 & -3 & 9 & 15 \end{pmatrix}$ **,d)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 15 & -1 \\ 16 & -18 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 & 6 & -2 \\ 7 & -8 & 7 & 13 & -9 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ **17.** Např. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B.A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. a) 7 , **b)** -24 , **c)** 39 , **d)** -2 , **e)** 28 , **f)** -30

19. a) $\mathbf{x} = (3,4,5)^T$, **b)** $\mathbf{x} = (3/5\ , -6/5\ , 12/5\ , 0)^T$

20. a) $\mathbf{x} = (1,-1,2)^T$, **b)** $\mathbf{x} = (1,-1,2,1)^T$, **c)** $\mathbf{x} = (0,0,0)^T$, **d)** nemá řešení

e) $\mathbf{x} = (4,-1,0,0)^T + r.(8,-6,1,0)^T + s.(-7,5,0,1)^T$

f) $\mathbf{x} = (-1,3,0,0,0)^T + r.(1,-4,1,0,0)^T + s.(4,-7,0,1,0)^T + t.(1,-3,0,0,1)^T$

21. a) $\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 11 & -2 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ **, b)** $\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -6 & 7 & 8 \\ 6 & 13 & 2 \end{pmatrix}$ **, c)** $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -6 & -7 & 17 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

22. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **, b)** $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

24. a) $\alpha_1 = 3$, $(0,1,1)^T$; $\alpha_2 = 0$, $(-3,0,2)^T$; $\alpha_3 = -1$, $(1,0,-1)^T$

b) $\alpha_1 = 2$, $(0,0,1)^T$; $\alpha_2 = -2$, $(-16,20,1)^T$; $\alpha_3 = 3$, $(-1,0,1)^T$

25. a) $< 0,3)$ **, b)** $(-\infty,0> \cup \{1,3,5,...\}$ **, c)** $< -4, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, -1 >$