# Řešení písemné práce 3.2.2006

**Příklad 1.**: Znak X udává délku praxe (v letech) a znak Y výšku prémií (v Kč) zaměstnanců jisté firmy. Dvourozměrné rozložení četností je dáno kontingenční tabulkou:

| x | y | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1250 | 1750 | 2250 | 2750 | 3250 | 3750 | 4250 |
| 12,5 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17,5 | 2 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 22,5 | 0 | 1 | 6 | 7 | 4 | 0 | 0 |
| 27,5 | 0 | 0 | 1 | 3 | 7 | 1 | 0 |
| 32,5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 | 5 | 1 |

a) Sestavte kontingenční tabulky sloupcově a řádkově podmíněných relativních četností. (definice 2.7., příklad 2.9.) (1,5 bodu)
b) Kolik procent pracovníků s délkou praxe 22,5 roku má prémie nanejvýš 2250 Kč? (příklad 2.9.) (0,5 bodu)
c) Jaká je průměrná výše prémií?( definice 3.20.) (1 bod)
d) Stanovte modus a medián výše prémií. (definice 3.3, definice 3.4.) (1 bod)

Upozornění: Výsledky udávejte na tři desetinná místa.

**Řešení:**
Nejprve doplníme tabulku o marginální četnosti.

| x | y | | | | | | | $n_{j.}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1250 | 1750 | 2250 | 2750 | 3250 | 3750 | 4250 | |
| 12,5 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| 17,5 | 2 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 22,5 | 0 | 1 | 6 | 7 | 4 | 0 | 0 | 18 |
| 27,5 | 0 | 0 | 1 | 3 | 7 | 1 | 0 | 12 |
| 32,5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 | 5 | 1 | 17 |
| $n_{.k}$ | 7 | 8 | 11 | 11 | 21 | 6 | 1 | 65 |

ad a)

Kontingenční tabulka sloupcově podmíněných relativních četností: $p_{j(k)} = \dfrac{n_{jk}}{n_{.k}}$

| x | y | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1250 | 1750 | 2250 | 2750 | 3250 | 3750 | 4250 |
| 12,5 | 0,714 | 0,375 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17,5 | 0,286 | 0,500 | 0,364 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 22,5 | 0 | 0,125 | 0,545 | 0,636 | 0,190 | 0 | 0 |
| 27,5 | 0 | 0 | 0,091 | 0,273 | 0,333 | 0,167 | 0 |
| 32,5 | 0 | 0 | 0 | 0,091 | 0,477 | 0,833 | 1,000 |

Kontingenční tabulka řádkově podmíněných relativních četností: $p_{(j)k} = \frac{n_{jk}}{n_{j.}}$

| x | y | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1250 | 1750 | 2250 | 2750 | 3250 | 3750 | 4250 |
| 12,5 | 0,625 | 0,375 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17,5 | 0,200 | 0,400 | 0,400 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 22,5 | 0 | 0,056 | 0,333 | 0,389 | 0,222 | 0 | 0 |
| 27,5 | 0 | 0 | 0,083 | 0,250 | 0,584 | 0,083 | 0 |
| 32,5 | 0 | 0 | 0 | 0,059 | 0,588 | 0,294 | 0,059 |

ad b) Ve 3. řádku kontingenční tabulky řádkově podmíněných relativních četností sečteme čísla v 1., 2. a 3. sloupci: 0 + 0,056 + 0,333 = 0,389. Hledaný údaj je tedy 38,9%.

ad c) m = (7.1250 + 8.1750 + 11.2250 + 11.2750 + 21.3250 + 6.3750 + 4250)/65 = 172750/65 = 2657,70 Kč

ad d) Medián $y_{0,50} = y_{(33)}$ = 2750 Kč, modus = 3250 Kč

**Příklad 2.**: Potřebu smrkových sazenic kryje lesní závod produkcí dvou školek. První školka kryje 75% výsadby, přičemž ze 100 sazenic je 80 první jakosti. Druhá školka kryje výsadbu z 25%, přičemž na 100 sazenic připadá 60 první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že

a) náhodně vybraná sazenice je první jakosti; (věta 6.7. (a), příklad 6.8. (a)) (2 body)
b) náhodně vybraná sazenice první jakosti pochází z produkce první školky; (věta 6.7. (b), příklad 6.8. (b)) (1 bod)
c) náhodně vybraná sazenice první jakosti pochází z produkce druhé školky? (věta 6.7. (b), příklad 6.8. (b)) (1 bod)

**Řešení**:
$H_1$ … sazenice pochází z 1. školky, $P(H_1) = 0,75$
$H_2$ … sazenice pochází z 2. školky, $P(H_2) = 0,25$
A … sazenice je 1. jakosti, $P(A/H_1) = 0,8$, $P(A/H_2) = 0,6$
ad a) $P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) = 0,75.0,8 + 0,25.0,6 = 0,75$

ad b) $P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,75 \cdot 0,8}{0,75} = 0,8$

ad c) $P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,6}{0,75} = 0,2$

**Příklad 3.**: V následující tabulce jsou údaje o výnosnosti dosažené 12 náhodně vybranými firmami při investování do mezinárodního podnikání (veličina X) a do domácího podnikání (veličina Y):

| č.firmy | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 10 | 12 | 14 | 12 | 12 | 17 | 9 | 15 | 9 | 11 | 7 | 15 |
| Y | 11 | 14 | 15 | 11 | 13 | 16 | 10 | 13 | 11 | 17 | 9 | 19 |

(Výnosnost je vyjádřena v procentech a představuje podíl na zisku vložených investic za rok) Na hladině významnosti 0,1 testujte hypotézu, že neexistuje rozdíl mezi střední hodnotou výnosnosti investic do mezinárodního a domácího podnikání proti oboustranné alternativě. Testování proveďte

a) pomocí intervalu spolehlivosti (poznámka 13.5. (b), věta 12.9.) (2 body)
b) pomocí kritického oboru. (poznámka 13.5. (b), věta 13.9.) (2 body)

(Pro úsporu času máte uvedeny realizace výběrového průměru m = $-1,\bar{3}$ a výběrového rozptylu $s^2 = 4,\overline{78}$ rozdílového náhodného výběru $Z_i = X_i - Y_i$, i = 1, …, 12.)

**Řešení**:

Testujeme $H_0$: $\mu = 0$ proti $H_1$: $\mu \neq 0$

ad a)

90% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ při neznámém rozptylu $\sigma^2$ má meze:

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95}(n-1) = -1,\bar{3} - \frac{\sqrt{4,\overline{78}}}{\sqrt{12}} 1,7959 = -2,4677$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95}(n-1) = -1,\bar{3} + \frac{\sqrt{4,\overline{78}}}{\sqrt{12}} 1,7959 = -0,1989$$

Protože číslo c = 0 neleží v intervalu (-2,4677; -0,1989), $H_0$ zamítáme na hladině významnosti 0,1.

ad b)

Vypočítáme realizaci testové statistiky $t_0 = \dfrac{m-c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{-1,\bar{3}}{\frac{\sqrt{4,\overline{78}}}{\sqrt{12}}} = -2,11085$

Stanovíme kritický obor $W = \left(-\infty, -t_{0,95}(11)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,95}(11), \infty\right) = \left(-\infty, -1,7959\right\rangle \cup \left\langle 1,7959, \infty\right)$

Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, $H_0$ zamítáme na hladině významnosti 0,1.

**Hodnocení**

$(10,12\rangle$ … A, $(9,10\rangle$ … B, $(8,9\rangle$ … C, $(7,8\rangle$ … D, $\langle 6,7\rangle$ …E, $\langle 0,6)$ … F