

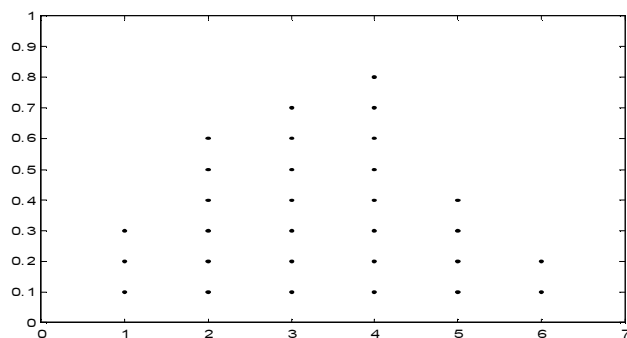
Řešení písemné zkoušky 10.2.2006

Příklad 1.: Byl zjišťován počet obyvatel (znak X) ve 30 bytech. Výsledky: 3 2 4 5 2 2 3 2 4 5 1 3 4 4 5 4 1 3 6 2 3 4 6 2 3 4 1 3 5 4. Pro tento znak

- sestrojte jednorozměrný tečkový diagram (Návod: definice 2.2., příklad 2.3.) (0,5 bodu)
- sestavte variační řadu (Návod: definice 2.4., příklad 2.5.) (1 bod)
- sestrojte graf četnostní funkce a empirické distribuční funkce (Návod: definice 2.4., příklad 2.5.) (1 bod)
- vypočtěte průměr, medián a kvartilovou odchylku (Návod: definice 3.20., definice 3.4., příklad 3.5.) (1,5 bodu)

Řešení:

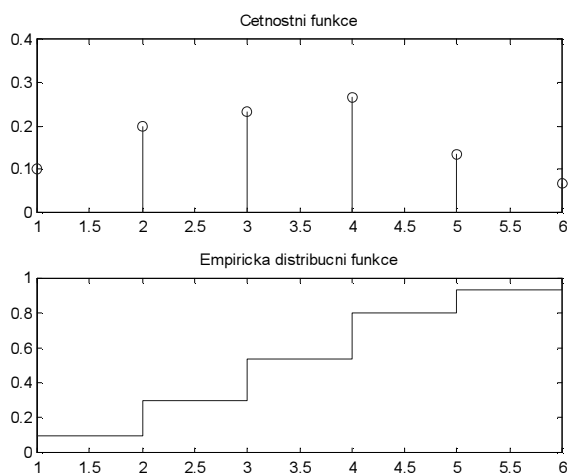
ad a)



ad b)

$X_{[j]}$	n_j	p_j	N_j	F_j
1	3	3/30	3	3/30
2	6	6/30	9	9/30
3	7	7/30	16	16/30
4	8	8/30	24	24/30
5	4	4/30	28	28/30
6	2	2/30	30	1
x	30	1	x	x

ad c)



ad d) $m = 3,3333$, medián = 3, dolní kvartil = 2, horní kvartil = 4, kvartilová odchylka = 2

Příklad 2.: Firma investovala do tří nezávislých projektů. Pravděpodobnost zisku z těchto projektů je 0,4, 0,5 a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že firma bude mít zisk

- právě jedenkrát (jev A) (1 bod)
- alespoň jedenkrát (jev B) (0,5 bodu)
- právě dvakrát (jev C) (1 bod)
- aspoň dvakrát (jev D) (0,5 bodu)
- ze všech tří projektů (jev E) (0,5 bodu)
- ze žádného projektu? (jev F) (0,5 bodu)

Řešení:

Označme A_i jev, že firma bude mít zisk z i -tého projektu, $i = 1, 2, 3$.

ad a)

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 10^{-3}(60 + 90 + 210) = 0,36$$

ad b)

$$P(B) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 1 - 0,09 = 0,91$$

ad c)

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 10^{-3}(60 + 140 + 210) = 0,41$$

ad d)

$$P(D) = P(C) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(C) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,41 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 =$$

$$= 0,41 + 0,14 = 0,55$$

ad e)

$$P(E) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14$$

ad f)

$$P(F) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09$$

Příklad 3.: Měřením délky deseti válečků byly získány hodnoty (v mm): 5,38 5,36 5,35 5,40 5,41 5,34 5,29 5,43 5,42 5,32. Pro úsporu času máte uveden aritmetický průměr $m = 5,37$ mm a směrodatnou odchylku $s = 0,044$ mm. Těchto deset hodnot považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 10 z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

- Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ . (Návod: věta 12.9. (b)) (1,5 bodu)
- Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou směrodatnou odchylku σ . (Návod: věta 12.9. (c)) (1,5 bodu)
- Na hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že střední hodnota délky válečků je 5,3 mm proti oboustranné alternativě. (Návod: poznámka 13.5. (b) (1 bod))

Řešení:

ad a)

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 5,37 - \frac{0,044}{\sqrt{10}} t_{0,995}(9) = 5,37 - \frac{0,044}{\sqrt{10}} 3,25 = 5,3248$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 5,37 + \frac{0,044}{\sqrt{10}} t_{0,995}(9) = 5,37 + \frac{0,044}{\sqrt{10}} 3,25 = 5,4152$$

$$5,3248 \text{ mm} < \mu < 5,4152 \text{ mm} \text{ s pravděpodobností aspoň } 0,99$$

ad b)

$$d = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0,044^2}{\chi^2_{0,995}(9)}} = \frac{3 \cdot 0,044}{\sqrt{23,589}} = 0,0272$$

$$h = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 0,044^2}{\chi^2_{0,005}(9)}} = \frac{3 \cdot 0,044}{\sqrt{1,735}} = 0,1002$$

0,0272 mm < σ < 0,1002 mm s pravděpodobností aspoň 0,99.

ad c) Testujeme $H_0: \mu = 5,3$ proti $H_1: \mu \neq 5,3$ na hladině významnosti 0,01. Protože 99% empirický interval spolehlivosti vypočtený v bodě (a) neobsahuje hodnotu 5,3, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01 a přijímáme alternativní hypotézu.