

Řešení písemné práce 3.2.2006

Příklad 1.: Znak X udává délku praxe (v letech) a znak Y výšku prémie (v Kč) zaměstnanců jisté firmy. Dvourozměrné rozložení četností je dáno kontingenční tabulkou:

x	y						
	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250
12,5	5	3	0	0	0	0	0
17,5	2	4	4	0	0	0	0
22,5	0	1	6	7	4	0	0
27,5	0	0	1	3	7	1	0
32,5	0	0	0	1	10	5	1

- Sestavte kontingenční tabulky sloupcově a řádkově podmíněných relativních četností. (definice 2.7., příklad 2.9.) (1,5 bodu)
- Kolik procent pracovníků s délkou praxe 22,5 roku má prémie nanejvýš 2250 Kč? (příklad 2.9.) (0,5 bodu)
- Jaká je průměrná výše prémie? (definice 3.20.) (1 bod)
- Stanovte modus a medián výše prémie. (definice 3.3, definice 3.4.) (1 bod)

Upozornění: Výsledky udávejte na tři desetinná místa.

Řešení:

Nejprve doplníme tabulku o marginální četnosti.

x	y							$n_{j.}$
	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250	
12,5	5	3	0	0	0	0	0	8
17,5	2	4	4	0	0	0	0	10
22,5	0	1	6	7	4	0	0	18
27,5	0	0	1	3	7	1	0	12
32,5	0	0	0	1	10	5	1	17
$n_{.k}$	7	8	11	11	21	6	1	65

ad a)

Kontingenční tabulka sloupcově podmíněných relativních četností: $p_{j(k)} = \frac{n_{jk}}{n_{.k}}$

x	y						
	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250
12,5	0,714	0,375	0	0	0	0	0
17,5	0,286	0,500	0,364	0	0	0	0
22,5	0	0,125	0,545	0,636	0,190	0	0
27,5	0	0	0,091	0,273	0,333	0,167	0
32,5	0	0	0	0,091	0,477	0,833	1,000

Kontingenční tabulka řádkově podmíněných relativních četností: $p_{(j)k} = \frac{n_{jk}}{n_{.j}}$

x	y						
	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250
12,5	0,625	0,375	0	0	0	0	0
17,5	0,200	0,400	0,400	0	0	0	0
22,5	0	0,056	0,333	0,389	0,222	0	0
27,5	0	0	0,083	0,250	0,584	0,083	0
32,5	0	0	0	0,059	0,588	0,294	0,059

ad b) Ve 3. řádku kontingenční tabulky řádkově podmíněných relativních četností sečteme čísla v 1., 2. a 3. sloupci: $0 + 0,056 + 0,333 = 0,389$. Hledaný údaj je tedy 38,9%.

ad c) $m = (7 \cdot 1250 + 8 \cdot 1750 + 11 \cdot 2250 + 11 \cdot 2750 + 21 \cdot 3250 + 6 \cdot 3750 + 4250) / 65 = 172750 / 65 = 2657,70$ Kč

ad d) Medián $y_{0,50} = y_{(33)} = 2750$ Kč, modus = 3250 Kč

Příklad 2.: Potřebu smrkových sazenic kryje lesní závod produkcí dvou školek. První školka kryje 75% výsadby, přičemž ze 100 sazenic je 80 první jakosti. Druhá školka kryje výsadbu z 25%, přičemž na 100 sazenic připadá 60 první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že

- náhodně vybraná sazenice je první jakosti; (věta 6.7. (a), příklad 6.8. (a)) (2 body)
- náhodně vybraná sazenice první jakosti pochází z produkce první školky; (věta 6.7. (b), příklad 6.8. (b)) (1 bod)
- náhodně vybraná sazenice první jakosti pochází z produkce druhé školky? (věta 6.7. (b), příklad 6.8. (b)) (1 bod)

Řešení:

H_1 ... sazenice pochází z 1. školky, $P(H_1) = 0,75$

H_2 ... sazenice pochází z 2. školky, $P(H_2) = 0,25$

A ... sazenice je 1. jakosti, $P(A/H_1) = 0,8$, $P(A/H_2) = 0,6$

ad a) $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,75 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,6 = 0,75$

ad b) $P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,75 \cdot 0,8}{0,75} = 0,8$

ad c) $P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,6}{0,75} = 0,2$

Příklad 3.: V následující tabulce jsou údaje o výnosnosti dosažené 12 náhodně vybranými firmami při investování do mezinárodního podnikání (veličina X) a do domácího podnikání (veličina Y):

č.firmy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	10	12	14	12	12	17	9	15	9	11	7	15
Y	11	14	15	11	13	16	10	13	11	17	9	19

(Výnosnost je vyjádřena v procentech a představuje podíl na zisku vložených investic za rok)

Na hladině významnosti 0,1 testujte hypotézu, že neexistuje rozdíl mezi střední hodnotou výnosnosti investic do mezinárodního a domácího podnikání proti oboustranné alternativě.

Testování proved'te

a) pomocí intervalu spolehlivosti (poznámka 13.5. (b), věta 12.9.) (2 body)

b) pomocí kritického oboru. (poznámka 13.5. (b), věta 13.9.) (2 body)

(Pro úsporu času máte uvedeny realizace výběrového průměru $m = -1,3$ a výběrového rozptylu $s^2 = 4,78$ rozdílového náhodného výběru $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \dots, 12$.)

Řešení:

Testujeme $H_0: \mu = 0$ proti $H_1: \mu \neq 0$

ad a)

90% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ při neznámém rozptylu σ^2 má meze:

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95}(n-1) = -1,3 - \frac{\sqrt{4,78}}{\sqrt{12}} 1,7959 = -2,4677$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95}(n-1) = -1,3 + \frac{\sqrt{4,78}}{\sqrt{12}} 1,7959 = -0,1989$$

Protože číslo $c = 0$ neleží v intervalu $(-2,4677; -0,1989)$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,1.

ad b)

$$\text{Vypočítáme realizaci testové statistiky } t_0 = \frac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{-1,3}{\frac{\sqrt{4,78}}{\sqrt{12}}} = -2,11085$$

Stanovíme kritický obor $W = (-\infty, -t_{0,95}(11)) \cup (t_{0,95}(11), \infty) = (-\infty, -1,7959) \cup (1,7959, \infty)$

Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,1.

Hodnocení

$(10,12) \dots$ A, $(9,10) \dots$ B, $(8,9) \dots$ C, $(7,8) \dots$ D, $(6,7) \dots$ E, $(0,6) \dots$ F