Řešení písemné zkoušky 8. 1. 2006

Příklad 1.: Je dán datový soubor 12 1,1 6,3 3,9 11 5,8 2,5 8 4,1 2 9,5 6,6 1,7 3,4 4,9 3 10,3 2,2 5,4 15,5. Stanovíme třídicí intervaly $(1,2\rangle, (2,4\rangle, (4,7\rangle, (7,11\rangle, (11,16\rangle$.

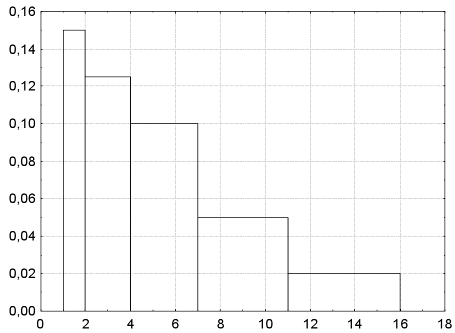
a) Sestavte tabulku rozložení četností. (1,5 bodu)
b) Nakreslete histogram a graf intervalové empirické distribuční funkce. (1,5 bodu)
c) Stanovte medián datového souboru. (0,2 bodu)
d) Vypočtěte průměr datového souboru. (0,8 bodu)

Řešení:
ad a)

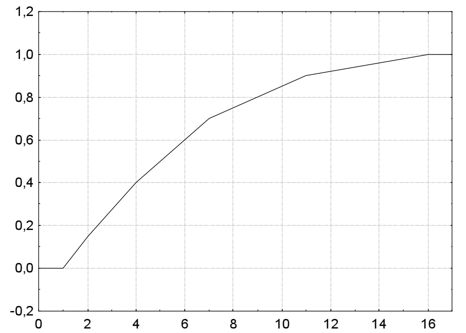
$(u_j, u_{j+1}\rangle$	$x_{[j]}$	d_j	n_j	p_j	N_j	F_j	f_j
$(1,2\rangle$	1,5	1	3	3/20=0,15	3	3/20=0,15	3/20=0,15
$(2,4\rangle$	3	2	5	5/20=0,25	8	8/20=0,4	5/40=0,125
$(4,7\rangle$	5,5	3	6	6/20=0,3	14	14/20=0,7	6/60=0,1
$(7,11\rangle$	9	4	4	4/20=0,2	18	18/20=0,9	4/80=0,05
$(11,16\rangle$	13,5	5	2	2/20=0,1	20	20/20=1	2/100=0,02

ad b)

Histogram



Graf intervalové EDF



ad c) Medián je průměr 10. a 11. uspořádané hodnoty, tedy $x_{0,50} = (4,9 + 5,4)/2 = 5,15$

$$m = \frac{1}{n}\sum_{j-1}^{r} n_j x_{[j]} = \frac{1}{20}\left(3\cdot 1,5 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5,5 + 4\cdot 9 + 2\cdot 13,5\right) = \frac{1}{20}1155 = 5,775$$

nebo $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 5,96$

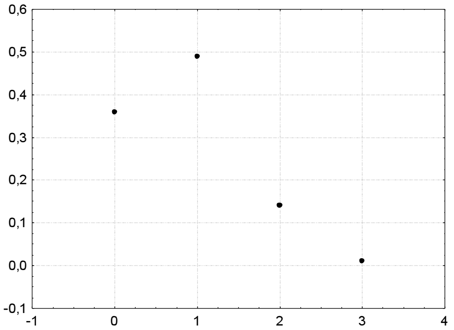
Příklad 2.: Provedeme tři nezávislé pokusy, v nichž sledujeme nastoupení úspěchu. V prvním pokusu nastává úspěch s pravděpodobností 0,5, ve druhém pokusu s pravděpodobností 0,2 a ve třetím pokusu s pravděpodobností 0,1.

a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X, která udává počet úspěchů v těchto třech pokusech a nakreslete její graf (2 body)
b) Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X. (0,5 bodu)
c) Vypočtěte rozptyl náhodné veličiny X. (1 bod)
d) Jaká je pravděpodobnost, že nastane aspoň jeden úspěch? (0,5 bodu)

Řešení:
ad a) Označme X_i počet úspěchů v i-tém pokusu, i = 1, 2, 3. X_i nabývá hodnot 0,1.
X nabývá hodnot 0, 1, 2, 3.

$$\pi(0) = P(X=0) = P((X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 0)) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 0) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}36$$
$$\pi(1) = P(X=1) =$$
$$= P((X_1 = 1 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 0) \vee (X_1 = 0 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 0) \vee (X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 1)) =$$
$$= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 0) + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 0) +$$
$$+ P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}36 + 0{,}09 + 0{,}04 = 0{,}49$$
$$\pi(2) = P(X=2) =$$
$$= P((X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 0) \vee (X_1 = 1 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 1) \vee (X_1 = 0 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1)) =$$
$$= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 0) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1) +$$
$$+ P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}14$$
$$\pi(3) = P(X=3) =$$
$$= P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$$

Graf pravděpodobnostní funkce



ad b) E(X) = 0.0,36 + 1.0,49 + 2.0,14 + 3.0,01 = 0,8
D(X) = 0^2.0,36 + 1^2.0,49 + 2^2.0,14 + 3^2.0,01 – $0{,}8^2$ = 1,14 – 0,64 = 0,5

ad c) P(X ≥ 1) = 1 – P(X = 0) = 1 - π(0) = 1 – 0,36 = 0,64

Příklad 3.: Při kontrole pěti balíčků cukru o deklarované hmotnosti 1000 g byly zjištěny tyto odchylky: -1, 2, -2, 3, 1. Považujeme je za realizace náhodného výběru rozsahu 5 z rozložení N(μ, σ^2).

a) Vypočtěte realizaci m výběrového průměru M a realizaci s^2 výběrového rozptylu S^2. (1 bod)
b) Sestrojte 99% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ. (1 bod)
c) Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro neznámou směrodatnou odchylku σ. (1 bod)
d) Na hladině významnosti 0,01 testujte hypotézu, že střední hodnota odchylek je nulová proti oboustranné alternativě. (1 bod)

Řešení:
ad a) m = 0,6, s^2 = 4,3

ad b) $d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 0{,}6 - \frac{\sqrt{4{,}3}}{\sqrt{5}} t_{0{,}995}(4) = 0{,}6 - \frac{\sqrt{4{,}3}}{\sqrt{5}} \cdot 4{,}6041 = -3{,}67$, $h = 4{,}87$

$-3{,}67 < \mu < 4{,}87$ s pravděpodobností 0,99

ad c) $d = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4{,}3}{\chi^2_{0{,}975}(4)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4{,}3}{11{,}1433}} = \sqrt{1{,}5435} = 1{,}24$

$h = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4{,}3}{\chi^2_{0{,}025}(4)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4{,}3}{0{,}4844}} = \sqrt{35{,}5065} = 5{,}96$

$1{,}24 < \sigma < 5{,}96$ s pravděpodobností 0,95

ad d) Protože 99% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu obsahuje 0, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,01.