

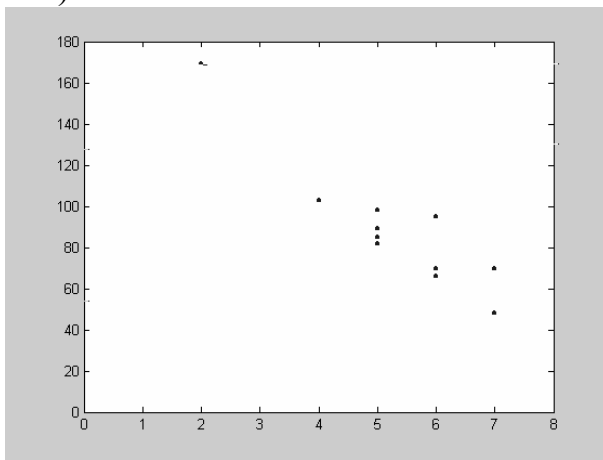
Řešení písemné práce 18.2.2006

Příklad 1.: U 11 náhodně vybraných aut jisté značky bylo zjišťováno jejich stáří (znak X – v letech) a cena (znak Y – v tisících Kč). Výsledky: (5, 85), (4, 103), (6, 70), (5, 82), (5, 89), (5, 98), (6, 66), (6, 95), (2, 169), (7, 70), (7, 48). Pro úsporu času máte uvedeny číselné charakteristiky (zaokrouhlené na dvě desetinná místa): $m_1 = 5,28$, $m_2 = 88,63$, $s_1^2 = 2,02$, $s_2^2 = 970,85$, $s_{12} = -40,89$.

- Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram a s jeho pomocí posuďte, zda závislost Y na X lze uspokojivě popsat regresní přímkou. (1 bod) Návod: viz př. 2.3.(e), př. 4.4.(b)
- Vypočítejte koeficient korelace a interpretujte ho. (1 bod) Návod: viz poznámka 3.17.
- Najděte rovnici regresní přímky znaku Y na znak X . (1 bod) Návod: viz věta 4.3.
- Jaký je regresní odhad ceny auta, které je staré 3 roky? (1 bod) Návod: viz př. 4.4.(d)

Řešení:

ad a)



ad b) $r_{12} = -0,92$. Mezi znaky X a Y existuje silná nepřímá lineární závislost. Čím starší auto, tím nižší cena.

ad c) $y = 195,31 - 20,24x$

ad d) $y = 195,31 - 3 \cdot 20,24 = 134,59$

Příklad 2.: Dlouhodobé zkušenosti s výsledky testu z matematiky na střední škole opravňují učitele k tomu, aby počet bodů v testu dosažených považoval za náhodnou veličinu X s rozložením $N(\mu, \sigma^2)$. Učitel se rozhodl, že bude test známkovat podle následujících pravidel:

výborně, když $X > \mu + \sigma$,

chvalitebně, když $\mu < X \leq \mu + \sigma$,

dobře, když $\mu - \sigma < X \leq \mu$,

dostatečně, když $\mu - 2\sigma < X \leq \mu - \sigma$,

nedostatečně, když $X \leq \mu - 2\sigma$.

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student ze skupiny zkušovaných studentů bude ohodnocen známkou

- výborně (0,6 bodu)
- chvalitebně (0,6 bodu)
- dobře (0,6 bodu)
- dostatečně (0,6 bodu)
- nedostatečně? (0,6 bodu)

Rozložení počtu bodů s hranicemi pro jednotlivé známky znázorněte na obrázku. (1 bod)
Návod: příklad 8.9., příklad 4. na straně 100, obrázek vlevo nahoře na straně 96.

Řešení:

ad a)

$$P(X > \mu + \sigma) = 1 - P(X \leq \mu + \sigma) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) = 1 - P(U \leq 1) = 1 - \Phi(1) =$$

$$= 1 - 0,84134 = 0,15866$$

ad b)

$$P(\mu < X \leq \mu + \sigma) = P(0 < U \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0,84134 - 0,5 = 0,34134$$

ad c)

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu) = P(-1 < U \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(0) - 1 = 0,5 + 0,84134 - 1 = 0,34134$$

ad d)

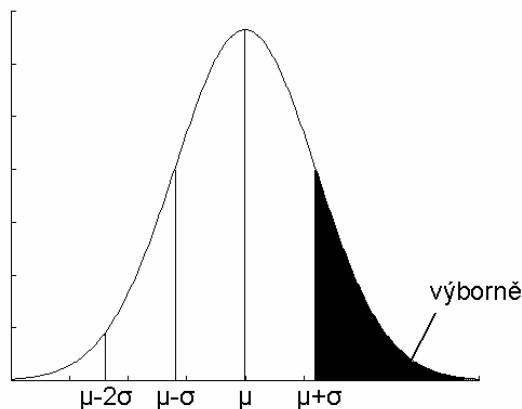
$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu - \sigma) = P(-2 < U \leq -1) = \Phi(-1) - \Phi(-2) = 1 - \Phi(1) - 1 + \Phi(2) - 1 = \Phi(2) - \Phi(1) =$$

$$= 0,97725 - 0,84134 = 0,13591$$

ad e)

$$P(X \leq \mu - 2\sigma) = P(U \leq -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,97725 = 0,02275$$

ad f)



Příklad 3.: Při kontrolních zkouškách životnosti 16 žárovek byl stanoven odhad $m = 3000$ h střední hodnoty jejich životnosti a odhad $s = 20$ h směrodatné odchylky jejich životnosti. Za předpokladu, že životnost žárovky se řídí normálním rozložením, vypočtěte

- 99% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu životnosti (1 bod)
- 99% empirický interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku životnosti (1 bod)
- 90% levostranný empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu životnosti (1 bod)
- 95% pravostranný empirický interval spolehlivosti pro rozptyl životnosti. (1 bod)

Návod: věta 12.9., příklad 12.8. – konkrétní aplikace

Upozornění: Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo a vyjádřete v hodinách a minutách.

Řešení:

ad a)

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,995}(n-1) = 3000 - \frac{20}{\sqrt{16}} 2,9467 = 2985,3, \quad h = 3014,7$$

2985 h a 18 min $< \mu < 3014$ h a 42 min s pravděpodobností aspoň 0,99

ad b)

$$d = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,995}(n-1)}} = \frac{\sqrt{15} \cdot 20}{\sqrt{32,801}} = 13,5, \quad h = \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,005}(n-1)}} = \frac{\sqrt{15} \cdot 20}{\sqrt{4,601}} = 36,1$$

13 h a 30 min $< \sigma < 36$ h a 6 min s pravděpodobností aspoň 0,99

ad c)

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,9}(n-1) = 3000 - \frac{20}{\sqrt{16}} 1,3406 = 2993,3$$

2993 h a 18 min < μ s pravděpodobností aspoň 0,9

ad d)

$$h = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,05}(n-1)} = \frac{15 \cdot 400}{7,261} = 826,3$$

826 h² a 18 min² > σ^2 s pravděpodobností aspoň 0,95

Hodnocení

(10,12) ... A, (9,10) ... B, (8,9) ... C, (7,8) ... D, (6,7) ... E, (0,6) ... F