

Řešení písemné zkoušky 21. 1. 2006

Příklad 1.: Je dána kontingenční tabulka obsahující hodnoty simultánní četnostní funkce $p(x,y)$ vektorového znaku (X, Y) :

x	y		
	0	1	2
0	0,20	0,20	0,00
1	0,05	0,25	0,03
2	0,05	0,01	0,05
3	0,05	0,01	0,10

- Doplňte tabulku o marginální četnostní funkce $p_1(x)$, $p_2(y)$. (0,6 bodu)
- Vypočítejte průměry znaků X , Y . (0,8 bodu)
- Vypočítejte rozptyly znaků X , Y . (1,2 bodu)
- Vypočítejte a interpretejte koeficient korelace znaků X , Y . (1,4 bodu)

Řešení:

ad a)

x	y			$p_1(x)$
	0	1	2	
0	0,20	0,20	0,00	0,40
1	0,05	0,25	0,03	0,33
2	0,05	0,01	0,05	0,11
3	0,05	0,01	0,10	0,16
$p_2(y)$	0,35	0,47	0,18	1

ad b)

$$m_1 = 1 \cdot 0,33 + 2 \cdot 0,11 + 3 \cdot 0,16 = 1,03, \quad m_2 = 1 \cdot 0,47 + 2 \cdot 0,18 = 0,83,$$

ad c)

$$s_1^2 = 1^2 \cdot 0,33 + 2^2 \cdot 0,11 + 3^2 \cdot 0,16 - 1,03^2 = 1,1491,$$

$$s_2^2 = 1^2 \cdot 0,47 + 2^2 \cdot 0,18 - 0,83^2 = 0,5011,$$

ad d)

$$s_{12} = 1 \cdot 1 \cdot 0,25 + 1 \cdot 2 \cdot 0,03 + 2 \cdot 1 \cdot 0,01 + 2 \cdot 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 1 \cdot 0,01 + 3 \cdot 2 \cdot 0,1 - 1,03 \cdot 0,83 = 0,3051,$$

$$r_{12} = \frac{0,3051}{\sqrt{1,1491} \sqrt{0,5011}} = 0,4021$$

Mezi znaky X a Y existuje slabá přímá lineární závislost.

Příklad 2.: V jedné dílně pracují nezávisle na sobě tři dělníci. Náhodná veličina X_i udává počet zmetků, které vyrobí i -tý dělník za jednu směnu, $i = 1, 2, 3$. Dlouhodobým pozorováním byly zjištěny hodnoty pravděpodobnostní funkce $\pi_i(x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

1. dělník		2. dělník		3. dělník	
x_1	$\pi_1(x_1)$	x_2	$\pi_2(x_2)$	x_3	$\pi_3(x_3)$
0	0,01	0	0,09	0	0,00
1	0,52	1	0,63	1	0,41
2	0,36	2	0,28	2	0,52
3	0,11	3	0,00	3	0,07

- Pomocí střední hodnoty počtu zmetků posuďte, který z dělníků podává nejlepší výkon. (1 bod)
- Pomocí rozptylu počtu zmetků posuďte, který z dělníků podává nejvyrovnanější výkon. (1,5 bodu)
- Jaká je střední hodnota a rozptyl počtu zmetků vyrobených v této dílně za jednu pracovní směnu? (1,5 bodu)

Řešení:

ad a) $E(X_1) = 1,57$, $E(X_2) = 1,19$, $E(X_3) = 1,66$. Znamená to, že nejlepší výkon podává druhý dělník.

ad b) $D(X_1) = 0,4851$, $D(X_2) = 0,3339$, $D(X_3) = 0,3644$. Znamená to, že nejvyrovnanější výkon podává druhý dělník.

ad c) $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 1,57 + 1,19 + 1,66 = 4,42$,
 $D(X_1 + X_2 + X_3) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) = 0,4851 + 0,3339 + 0,3644 = 1,1834$

Příklad 3.: Necht' X_1, \dots, X_{10} je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde parametry μ, σ^2 neznáme. Realizace výběrového průměru M je $m = 21,2$ a realizace výběrového rozptylu S^2 je $s^2 = 30,25$. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte nulovou hypotézu $H_0: \mu = 25$ proti alternativní hypotéze $H_1: \mu < 25$. Test proveďte pomocí

- intervalu spolehlivosti, (2 body)
- kritického oboru. (2 body)

Řešení:

ad a)

Při testování nulové hypotézy proti levostranné alternativě konstruujeme pravostranný interval spolehlivosti.

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) = 21,2 + \frac{\sqrt{30,25}}{\sqrt{10}} t_{0,99}(9) = 21,2 + 1,7392527 \cdot 2,8214 = 26,11$$

Protože číslo $c = 25$ leží v intervalu $(-\infty; 26,11)$, hypotézu $H_0: \mu = 25$ nezamítáme na hladině významnosti 0,01.

ad b)

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{21,2 - 25}{\frac{\sqrt{30,25}}{\sqrt{10}}} = -2,1848$

Číslo t_0 porovnáme s opačnou hodnotou kvantilu $t_{0,99}(9) = 2,8214$. Protože $-2,1848$ je větší než $-2,8214$, hypotézu $H_0: \mu = 25$ nezamítáme na hladině významnosti 0,01.

Hodnocení

$(10,12) \dots$ A, $(9,10) \dots$ B, $(8,9) \dots$ C, $(7,8) \dots$ D, $(6,7) \dots$ E, $(0,6) \dots$ F