

# Počební základy finanční matematiky

## sylabus 1. přednášky

(5.4)

19. 9. 2005

1

## Matematické základy

1.1

### Řady

Poznámka: Je-li  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost čísel, pak z této posloupnosti lze vytvořit novou posloupnost  $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ , následujícím rekurentním předpisem:  $s_1 = a_1, s_n = s_{n-1} + a_n$ , nebo též předpisem  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$

1.1.0.1 Posloupnost  $s_n$  budeme nazývat posloupnost částečných součtů řady. Jestliže posloupnost částečných součtů řady  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  konverguje (tj. existuje vlastní limita posloupnosti  $s_n$ ), nazýváme řadu  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergentní

1.1.0.2 **Definice:** Buď  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost. Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je posloupnost  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ , taková, že  $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$  tj.:

1.1.0.2.1 
$$\widetilde{\sum}_{n=1}^{\infty} a_n = \left( \sum_{i=1}^j (a_i) \right)_{j=1}^{\infty}$$

Pokud posloupnost na levé straně 1.1.0.2.1 konverguje, nazveme její limitu *součet řady*  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a_i)$$

1.1.0.3 **Poznámka:** Z historických důvodů se řada a její součet značí stejně, takže se symbol  $\widetilde{\sum}$  nepoužívá a místo něj se používá symbol  $\sum$ . Nerozlišuje se tedy *posloupnost částečných součtů*  $(\sum_{i=1}^j (a_i))_{j=1}^{\infty} = (s_n)_{n=1}^{\infty}$ , ( $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$ ) a její limita, která však ne vždy existuje. Pokud existuje a je vlastní ( $\in \mathbb{R}$ ) říká se o řadě, že je konvergentní, nebo že *konverguje*. Pokud tato limita existuje a je nevlastní ( $= \pm \infty$ ), říká se, že řada *diverguje*. Pokud tato limita neexistuje, říká se, že ona řada *osciluje*.

### 1.1.1 Mocnné řady a exponenciální funkce

1.1.1.1 **Definice:**

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{1}{2} \cdot z^2 + \frac{1}{6} \cdot z^3 + \frac{1}{24} \cdot z^4 + \frac{1}{120} \cdot z^5 + \dots$$

a odtud můžeme určit hodnotu eulerovy

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

1.1.1.2 Vidíme, že  $\exp' = \exp$ .

1.1.1.3 **Věta:** (Cauchy) Necht  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  absolutně konvergují. Pak konverguje také řada  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$  a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

1.1.1.4 **Poznámka:**

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots) (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \dots + b_n + \dots) = \\ \begin{aligned} & a_0 b_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0 + a_3 b_0 + \dots \\ & + a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 + \dots \\ = & + a_0 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_3 b_2 + \dots \\ & + a_0 b_3 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + \dots \\ & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \end{aligned} \end{aligned}$$

1.1.1.5 **Důsledek:**  $\exp(z_1 + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$

1.1.1.6 Předpokládejme  $x \in \mathbb{R}$ ,  $i$  je imaginární jednotka. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + i \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot i \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot i \cdot x^5 - \frac{1}{720} \cdot x^6 - \frac{1}{5040} \cdot i \cdot x^7 + \dots$$

1.1.1.7 A definujeme

$$\cos(x) = \Re \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{720} \cdot x^6 + \dots$$

1.1.1.8

$$\sin(x) = \text{Im} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7 + \dots$$

1.1.1.9 Platí tedy

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

a

$$i \cdot e^{ix} = (e^{ix})' = (\cos(x) + i \sin(x))' = \cos'(x) + i \cdot \sin'(x)$$

ale také

$$i \cdot e^{ix} = i(\cos(x) + i \sin(x))' = i \cos'(x) - \sin'(x) = -\sin'(x) + i \cos'(x)$$

odtud plyne:

$$\begin{aligned} \cos' &= -\sin \\ \sin' &= \cos \end{aligned}$$

1.1.1.10 **Definice:** Funkce  $\exp$  je na  $\mathbb{R}$  prostá. Definujeme funkci logaritmus  $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  jako funkci k ní inverzní. Tedy  $\ln$  je na  $\mathbb{R}^+$  jednoznačně definován těmito rovnicemi:

$$\begin{aligned} \ln \circ \exp &= \text{Id}_{\mathbb{R}}, \text{ tedy } \forall x \in \mathbb{R}: \ln(e^x) = x \\ \exp \circ \ln &= \text{Id}_{\mathbb{R}^+}, \text{ tedy } \forall x \in \mathbb{R}^+: e^{\ln(x)} = x \end{aligned}$$

1.1.1.11 Definujeme dále  $\exp_z = x \mapsto \exp(\ln(z) \cdot x)$  (tj.  $z^x = z^{\ln(z) \cdot x}$ ) a  $\log_z = \exp_z^{-1}$ . Tedy  $\exp = \exp_e$ .

1.1.2 **Pravidla pro počítání s logaritmem a mocninami**

1.1.2.1 Platí

$$\exp(\ln(x) + \ln(y)) \stackrel{1.1.1.5}{=} \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = x \cdot y = \exp(\ln(x \cdot y))$$

a pokud na obě strany rovnice aplikujeme funkci  $\ln$  dostaneme

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y)$$

1.1.2.2 Dále platí

$$\exp_a(x) \cdot \exp_b(x) = \exp(\ln(a) \cdot x) \cdot \exp(\ln(b) \cdot x) \stackrel{1.1.1.5}{=} \exp(x(\ln(a) + \ln(b))) \stackrel{1.1.2.1}{=} \exp_{a \cdot b}(x)$$

a tedy

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

1.1.2.3 Přímým dosazením do 1.1.1.1 dostaneme

$$\exp(0) = 1$$

a dále s použitím 1.1.1.5

$$\exp(-x) + \exp(x) = \exp(0) = 1 \implies \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$a^{-x} = e^{-x \cdot \log(a)} = \frac{1}{e^{x \cdot \log(a)}} = \frac{1}{a^x}$$

a protože podle 1.1.2.2 platí

$$\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

máme

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

1.1.2.4 Dále

$$\left(e^{\ln(z)}\right)^x = z^{x \cdot \ln(z)} = e^{x \cdot \ln(z)}$$

a tedy pro každou kladnou konstantu  $y$  ( $y = \ln(z)$ ) máme

$$(e^y)^x = e^{xy}$$

tento vztah platí ale i pro záporná  $y$ , protože

$$e^{yx} = \frac{1}{e^{-yx}} \stackrel{1.1.2.3}{=} \left(\frac{1}{e}\right)^{-yx} \stackrel{-y \geq 0}{=} \left(\left(\frac{1}{e}\right)^{-y}\right)^x \stackrel{1.1.2.3}{=} (e^{-y})^x$$

1.1.2.5 Dále

$$\exp_w(\log_z(x) \cdot \log_w(z)) = \left(w^{\log_w(z)}\right)^{\log_z(x)} = z^{\log_z(x)} = x = \exp_w(\log_w(x))$$

a pokud obě strany rovnosti zobrazíme funkcí  $\log_w$  dostaneme

$$\log_z(x) \cdot \log_w(z) = \log_w(x)$$

a tedy

$$\log_z(x) = \frac{\log_w(x)}{\log_w(z)} = \frac{\ln(x)}{\ln(z)}$$

nadto pro inverzní funkci platí (pokud označíme  $h_r$  homotetii  $h: x \mapsto r \cdot x$ )

$$\exp_w = \log_w^{-1} = (h_{\log_w(z)} \circ \log_z)^{-1} = \ln_z^{-1} \circ h_{\log_w(z)}^{-1} = \exp_z \circ h_{1/\log_w(z)}$$

protože  $h_r^{-1} = h_{1/r}$ , a tedy

$$w^x = z^{\frac{x}{\log_w(z)}}$$

Za povšimnutí rovněž stojí, že

$$\log_z(w) = \frac{\ln(z)}{\ln(w)} = \frac{1}{\log_w(z)}$$

1.1.2.6 **Cvičení:** Ze vztahu 1.1.2.4 tj.  $(\exp(a))^b = \exp(a \cdot b)$  vyvoďte:

$$\ln(a^b) = b \ln(a)$$

1.1.2.7 **Cvičení:** Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí

1.1.2.7.1 •  $x \mapsto x^2, x \mapsto 2^x, x \mapsto x^4, x \mapsto 4^x$

1.1.2.7.2 •  $x \mapsto x^2, x \mapsto 2x^2 + 1, x \mapsto -x^2$

1.1.2.7.3 •  $x \mapsto 2^x, x \mapsto 3^x, x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.1.2.7.4 •  $x \mapsto 2^x, x \mapsto 2^{-x}, x \mapsto -2^x, x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.1.2.7.5 •  $x \mapsto \log_2(x), x \mapsto \log_3(x), x \mapsto \ln_{\frac{1}{2}}(x)$

1.1.2.7.6 •  $x \mapsto 2^x, x \mapsto \log_2 x, x \mapsto 4^x, x \mapsto x^4,$

1.1.2.7.7 •  $x \mapsto x^2, x \mapsto x^2 + 1, x \mapsto (x + 2)^2$

1.1.2.7.8 •  $x \mapsto x^2, x \mapsto 2x^2 + 1, x \mapsto -x^2$

1.1.2.7.9 •  $x \mapsto 2^x, x \mapsto 3^x, x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.1.2.7.10 •  $x \mapsto 2^x, x \mapsto 2^{-x}, x \mapsto -2^x, x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.1.2.7.11 •  $x \mapsto \ln_2(x), x \mapsto \ln_3(x)$

1.1.2.7.12 • . Grafy popište!

1.1.2.8 **Cvičení:** Najděte všechna řešení rovnic  $2^{x+1} = 7, 3^{x+2} = 6, 3 \cdot 2^{x-1} = 2, \log_3(x) = 5, \log_{25}(x) = \frac{1}{2}, 2^x = \ln 2.$

1.1.2.9 **Cvičení:**  $\text{id}^n: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{cases}$  Učete hodnotu funkce

$$\text{Id}^3 \circ \ln \circ \text{Id}^2$$

v bodě  $e$ .

1.1.2.10 **Příklad:** Najděte všechny lokální extrémy funkce  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$  a určete je.

1.1.2.11 **Řešení:**

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\ln(x)}{x} \right) = -\frac{-1 + \ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\ln(x)}{x} \right) = \frac{-3 + 2 \ln(x)}{x^3}$$

$$0 > -e^{-3} = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\ln(x)}{x} \right) \Big|_{x=e}$$

tj. zadaná funkce má v bodě  $e$  lokální maximum.

## 2

## Relativní a absolutní hodnota

*Učitel matematiky vyvolá kloučka v poslední lavici: „Abi, co jsou to čtyři procenta?“*

*Abi potřese hlavou: „No jo, pane učeli, co jsou to čtyři procenta!?“*

Josef Kalenský: Hrách v botě: Židovské anekdoty 1. vydání, Praha, Grafoprint-Neubert, 1993 ISBN

80-857885-12-9

Uvažujme tři různé obchodované komodity po dobu alespoň  $\langle 0, 5 \rangle$ , kde čas je měřen v nějaké vhodné jednotce.  $i$ -tá komodita,  $i = 1, 2, 3$  se obchoduje v okamžiku  $t = 1, 2, 3, 4, 5$  v kurzu

$$(i, t) \mapsto \left| 2i^3 + 5i^2 \sin\left(\frac{it}{6}\right) \right| + 1$$

tedy

Okamžik	Kurz komodity		
	1.	2.	3.
0	3	17	55
1	3,83	23,6	76,6
2	4,64	29,4	92,9
3	5,40	33,8	99,9
4	6,10	36,4	95,9
5	6,70	36,9	81,9

Kurz komodity je číslo, ale můžeme předpokládat, že to je veličina, která má rozměr  $\frac{\text{měna}}{\text{jednotka množství}}$ . Množství se může ovšem u každé komodity měřit jinak (jednou objem, jednou hmotnost, jednou třeba počet zrněk), zatímco měna zůstává konstantní.

- 2.1.0.1 Předpokládáme, že komodity jsou libovolně dělitelné a že zásoby jsou neomezené, tj. že můžeme nakoupit jakékoliv množství jakékoliv komodit. Otázka je, kterou komoditu je v tom kterém okamžiku výhodné podržet.
- 2.1.0.2 Znalost kursu nám v rozhodování nepomůže. Důležité je, jak se budou kurzy měnit. Podržíme-li komodity, jejichž kurzy rostou, vyděláme. Podržíme-li komodity, jejichž kurzy klesají, proděláme. Předpokládejme, že chceme vydělat co nejvíce. Spočítáme o kolik se změní kury každé komodity do následujícího okamžiku (tedy v okamžiku  $t$  určíme hodnotu  $\kappa(i, t+1) - \kappa(i, t)$ )
- 2.1.0.3

Okamžik	Změna kurzu komodity za nejbližší období		
	1.	2.	3.
0	0,83	6,6	21,6
1	0,81	5,8	16,3
2	0,76	4,4	7,0
3	0,70	2,6	-4,0
4	0,60	,5	-14,0
5	0,51	-1,7	-20,6

Stanovili jsme přírůstek kurzu na jednotku množství komodity, ale nás by spíš zajímal relativní přírůstek kurzu, přírůstek kurzu na jednotku investovaného kapitálu.

$$\frac{\kappa(j, i+1) - \kappa(j, i)}{\kappa(j, i)}$$



## 3.1

### 3.1.1 Definice

- 3.1.1.1 **Poznámka:** Funkce, která má v každém bodě stejnou derivaci jako hodnotu je až na násobek funkce  $\exp$ , tj. Všechna řešení rovnice

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \phi(x)$$

jsou funkce ve tvaru

$$\phi: x \mapsto e^x \cdot c_1$$

kde  $c_1$  je nějaká konstanta. Jsou to funkce které mají v každém bodě — ve kterém existuje — stejný poměr derivace a hodnoty a tento poměr je 1, neboli jsou to funkce, které mají stejnou relativní hodnotu derivace vyjádřenou v hodnotách funkce jako v jednotkách (a to rovnu jedné).

- 3.1.1.2 Kdybychom hledali všechny funkce, které mají konstantní poměr derivace a hodnoty (už by ta konstanta nemusela být 1), hledali bychom řešení rovnic:

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = K\phi(x)$$

pro všechny konstanty  $K$  a ta jsou:

$$\phi(x) = e^{Kx} c_2$$

kde  $c_2$  je libovolná konstanta.

- 3.1.1.3 **Definice:** *Exponenciální funkce* nazveme každou funkci

$$x \mapsto Ae^{Bx},$$

kde  $A$  a  $B$  jsou nějaké konstanty.

- 3.1.1.4 **Definice:** Řekneme, že veličina  $F$  závislá na čase je v ustáleném stavu (v čase), pokud její hodnota je exponenciální funkcí času.

- 3.1.1.5 **Poznámka:** Hodnoty exponenciální funkce  $\phi$  v ekvidistantních okamžicích, tj. čísla  $\phi(x_0), \phi(x_0 + k), \phi(x_0 + 2k), \phi(x_0 + 3k), \dots$ , kde  $k > 0$  tvoří geometrickou posloupnost. Kvocient této posloupnosti použijeme jako míru růstu  $\phi$ .

## 3.2 Míra růstu veličin v ustáleném stavu. Míra růstu inflace, jako příklad.

### 3.2.1 Reálná a nominální a hodnota

*Cynic is a man, who knows the price of everything and the value of nothing.*

Oscar Wilde

Agregace je seskupení (z lat a- a grex, gen gregio =stádo).

- 3.2.1.1 Uvažujme zboží jako agregát a nějakou jeho míru objemu. Uvažujme nějakou měnu jako jednotku množství peněz.
- 3.2.1.2 Cena jednotky množství zboží se mění v čase.
- 3.2.1.3 Index cen je cena jednotkového množství agregovaného zboží. Protože jednotka množství zboží není dobře definovaná veličina, na počátku našich úvah nějakou zvolíme, lze ji zvolit například tak, aby v počátku (v čase  $t = 0$ ) byla cena jednotkového množství zboží 100, což se často dělá.
- 3.2.1.4 Pokud je inflace, cena zboží roste, a tedy cena peněz klesá. Peníze jsou ekvivalentem cen bohužel závislým na čase. Pomocí peněz lze porovnávat ceny platné pouze v tomtéž okamžiku. Pokud porovnááme cenu zboží v jednom okamžiku s cenou jiného zboží v jiném okamžiku nejsou peníze vhodným ekvivalentem.
- 3.2.1.5 A pokud je jako ekvivalent cen použijeme, jsme v situaci krejčího, kterému se prodlužuje metr a který, když šije oblek, musí znát nejen míry zákazníka, ale i to, kdy je měřil, aby je mohl správně přepočítat.
- 3.2.1.6 Cena vyjádřená v jednotkách nějaké měny se nazývá jmenovitá, nebo nominální cena (hodnota). Cena vyjádřená v jednotkách nějakého množství agregovaného zboží se nazývá reálná cena (hodnota).
- 3.2.1.7 Nominální hodnota peněz je konstantní. Reálná hodnota peněz klesá, je-li inflace, roste je-li deflace. Ceny jsou nepřímou uměrné hodnotě peněz.

### 3.2.2 Inflace a její míra

3.2.2.1 **Definice:** Nechť agregované ceny zboží  $P$  mají v čase  $t$  hodnotu  $P(t)$ . Míra inflace  $\iota(\langle t_0, t_1 \rangle)$  za dobu  $\langle t_0, t_1 \rangle$  je relativní hodnota přírůstku ceny zboží  $P$  za tuto dobu, vyjádřená v jednotce  $P(t_0)$ , tedy

$$\iota(\langle t_0, t_1 \rangle) = \frac{P(t_1) - P(t_0)}{P(t_0)}$$

3.2.2.2 Můžeme rovněž vyjádřit míru inflace porovnáním ceny peněz. Cena zboží a cena peněz jsou nepřímo úměrné: Pokud je v čase  $t$  cena zboží  $P(t)$  a cena peněz  $X(t)$  paltí:

$$P(t_0)X(t_0) = P(t_1)X(t_1)$$

a tedy

$$\frac{P(t_1)}{P(t_0)} = \frac{X(t_0)}{X(t_1)}$$

a platí

$$\iota(\langle t_0, t_1 \rangle) = \frac{P(t_1) - P(t_0)}{P(t_0)} = \frac{P(t_1)}{P(t_0)} - 1 = \frac{X(t_0)}{X(t_1)} - 1 = \frac{X(t_0) - X(t_1)}{X(t_1)}$$

a míra inflace za dobu  $\langle t_0, t_1 \rangle$  je relativní hodnota přírůstku ceny peněz  $X$  za tuto dobu, vyjádřená v jednotce  $X(t_1)$ .

3.2.2.3 **Poznámka:** Je-li hodnota peněz konstantního množství (konstantní ceny) v čase  $t_0$  je  $X_0$  a v čase  $t_1$  je  $X_1$ . Je-li  $t_0 < t_1$ ,  $X_0 > X_1$  jde o inflaci. Poměr  $\frac{X_0}{X_1} = \kappa$  nezávisí na množství peněz  $X$  a číslo  $\iota = \kappa - 1$  je míra inflace.

3.2.2.4 **Příklad:** Je-li míra inflace  $\iota = 0$  je  $X_1 = X_0$ . Je-li míra inflace  $\iota = 1$  je  $X_1 = \frac{1}{2}X_0$ . Je-li míra inflace  $\iota = \frac{1}{2}$  je  $X_1 = \frac{2}{3}X_0$ .

3.2.2.5 Míra infalce je bezrozměrné číslo, které udává jak se změnila reálná hodnota peněz. Jak se změnila za určitou dobu, v našem případě za dobu od okamžiku  $t_0$  do okamžiku  $t_1$ .

3.2.2.6 Reálná hodnota peněz v čase  $t_1$  (jejichž hodnota v čase  $t_0$  byla  $X_0$ ) je  $X_1 = \frac{X_0}{1+\iota}$ . Tento vztah je vztahem reálné hodnoty v čase  $t_0$  a  $t_1$  jakéhokoliv množství peněz.

3.2.2.7 Pro agregované ceny  $P$  platí tento vztah:

$$P_1 = P_0 \cdot (1 + \iota)$$

3.2.2.8 **Poznámka:** Pokud jsou ceny v ustáleném stavu (tj rostou exponenciálně viz. (3.1.1.4)) na nějakém intervalu času, míra inflace v tomto intervalu závisí jen na délce času a nikoliv na jeho počátečním okamžiku.

3.2.2.9 Zvolme nějakou jednotku času a předpokládejme, že míra inflace je  $\iota$  a že ceny jsou v ustáleném stavu, to znamená, že za každou dobu jednotkové délky (bez ohledu na to, kde v čase začíná) je poměr reálné hodnoty na počátku a na konci týž a sice  $1 + \iota$ .

3.2.2.9.1 • Jaká je míra inflace za dvě taková období?

3.2.2.9.2 • Jaká je míra inflace za polovinu této doby.

3.2.2.9.3 • Obecně: Jaká je míra inflace za období délky  $\Delta t$ ?

Označme  $\iota(1) = \iota$  a označme  $t_{1/2}$  a  $t_2$  časové okamžiky splňující:  $t_{1/2} = \frac{t_0+t_1}{2}$  a  $t_2 = 2t_1 - t_0$ . V čase  $t_2$  je reálná hodnota  $X_2 = \frac{X_1}{1+\iota(1)} = \frac{X_0}{(1+\iota(1))^2}$  a my ve 3.2.2.9.1 hledáme takové  $\iota(2)$ , aby  $\frac{X_0}{1+\iota(2)} = \frac{X_0}{(1+\iota(1))^2}$  Odtud

$$\iota(2) = (1 + \iota(1))^2 - 1.$$

3.2.2.10 Podobně 3.2.2.9.2: hledáme takové  $\iota(\frac{1}{2})$ , aby  $\frac{X_0}{(1+\iota(\frac{1}{2}))^2} = \frac{X_0}{1+\iota(1)}$  a

$$\iota\left(\frac{1}{2}\right) = (1 + \iota(1))^{1/2} - 1.$$

3.2.2.11 Tuto úvahu můžeme opakovat pro libovolné racionální číslo. Dostaneme

$$\iota\left(\frac{p}{q}\right) = (1 + \iota(1))^{p/q} - 1.$$



a pokud má být funkce  $\iota$  spojitá, je podle Heineho věty (protože racionální čísla jsou hustá v množině reálných čísel)

$$\iota(\Delta t) = (1 + \iota(1))^{\Delta t} - 1.$$

Tedy

3.2.2.12 **Lemma:** Jsou-li ceny v ustáleném stavu, je míra jejich inflace exponenciální funkcí délky času, za něž se inflace počítá. A vztah mezi reálnou hodnotou kapitálu téže nominální hodnoty v čase 0 a v čase  $t$  je

$$X(t) = \frac{X(0)}{(1 + \iota)^t}$$

kde  $\iota$  je míra inflace za dobu 1.

### 3.2.3 Průměrná inflace

3.2.3.1 Připomeňme, že průměr  $n$  čísel, je funkce neklesající v žádném z těchto čísel, jejíž hodnota je mezi nejmenším a největším z nich.

3.2.3.2 **Definice:** Průměrná inflace za dobu  $\langle t_0, t_1 \rangle$  je taková inflace cen v ustáleném stavu, která má stejnou míru za dobu  $\langle t_0, t_1 \rangle$  jako inflace těch cen, jejímž je průměrem.

3.2.4 **Případ ekvidistantních období:** Předpokládejme, že v každém z  $n$  intervalů  $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ ,  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , které mají stejnou délku, je míra inflace  $\iota_i$ . Pak kapitál reálné hodnoty  $X_0$  v čase  $t_0$  má v čase  $t_n$  reálnou hodnotu

$$X_n = \frac{X_0}{(1 + \iota_1)(1 + \iota_2) \cdots (1 + \iota_n)}$$

Hledáme  $\iota$  pro které platí:  $X_n = \frac{1}{(1 + \iota)^n}$ . Dostáváme míru průměrné inflace:

$$\iota = \sqrt[n]{(1 + \iota_1)(1 + \iota_2) \cdots (1 + \iota_n)} - 1$$

3.2.4.1 **Příklad:** Jaká je průměrná měsíční inflace. . .

3.2.5 **Případ neekvidistantních období:** Předpokládejme, že chceme znát průměrnou inflaci  $\iota$  za dobu  $\tau$  v nějakém časovém období  $I$ , jsou-li známy míry inflace v různých disjunktních obdobích délky  $I_1, \dots, I_n$  které pokrývají  $I$ . Předpokládejme, že průměrná míra inflace v období  $I_i$  je  $\iota_i$ . Postupujeme stejně, jako v případě 3.2.4: násobením spočítáme míru inflace  $(+1)$  za dobu  $I_1 + I_2 + \dots + I_n$ , pak odmocněním spočítáme míru inflace  $(+1)$  za jednotku času a umocněním za dobu  $\tau$  a odečteme jedničku. Průměrná inflace za jednotku času tedy je:

$$((1 + \iota_1)(1 + \iota_2) \cdots (1 + \iota_n))^{\frac{1}{I_1 + I_2 + \dots + I_n}} - 1$$

A za období délky  $\tau$

$$((1 + \iota_1)(1 + \iota_2) \cdots (1 + \iota_n))^{\frac{\tau}{I_1 + I_2 + \dots + I_n}} - 1.$$

3.2.5.1 **Příklad:** Chceme znát průměrnou čtvrtletní inflaci za dobu uraďování ministra financí Šejdříře. Šejdříř byl ministrem financí v letech 2000, 2001, 2002 (pokaždé celý rok) a pak znovu čtyři měsíce na konci roku 2003. Celková míra inflace za roky 2000 a 2001 (dohromady) byla 0,3, míra inflace za rok 2002 byla 0,15 a měsíční míra inflace v každém z měsíců roku 2003 byla 0,05. Protože výsledek je jen přibližná aproximace skutečnosti, můžeme si dovolit zaokrouhlení a považovat všechny měsíce za stejně dlouhé a rok za jejich dvanáctinásobek. Průměrná čtvrtletní inflace tedy je

$$((1 + 0,3)(1 + 0,15)(1 + 0,05)^4)^{\frac{3}{40}} - 1 \doteq 0,045815030$$

3.2.6 **Bezúročné spoření** Nyní předpokládejme, že si po určitou dobu ukládáme v okamžicích  $t = 0, 1, 2, \dots$  peníze na účet, na němž je úroková míra zanedbatelně malá a nebo, že si je necháváme v hotovosti. Předpokládejme, že úločky mají konstantní nominální hodnotu  $z$ . Nominální hodnota stavu účtu v čase 0 je  $x(0) = z$ . Nominální hodnota účtu v čase 1 je  $x(1) = 2z$ . Nominální hodnota účtu v čase 1,5 je stále je  $x(1,5) = 2z$ . Nominální hodnota stavu účtu v čase  $t$  je  $z \cdot [t + 1]$ , kde  $[-]$  je funkce celá část. 3.3.3.1 Jaká je reálná hodnota  $X(t)$  (měřená hodnotou v čase 0) stavu účtu, v čase  $t$  je-li inflace v ustáleném stavu a je-li její míra za období délky 1 rovna  $\iota$ ? Je  $X(t) = \frac{x(t)}{(1+\iota)^t} = \frac{z \cdot [t+1]}{(1+\iota)^t}$ .

3.2.6.1 **Příklad:** V jakém čase nabývá  $X(t)$  maxima?

3.2.6.2 **Řešení:** Předpokládáme  $\iota > 0, z > 0$ . Aproximujeme  $X$  spojitou (dokonce diferencovatelnou) funkcí

$$X(t) = \frac{z \cdot (t + 1)}{(1 + \iota)^t}$$

Jest

$$X'(t) = \frac{z - z(t + 1) \ln(1 + \iota)}{(1 + \iota)^t}$$

a

$$X'(t) = 0 \iff t = \frac{1 - \ln(1 + \iota)}{\ln(1 + \iota)}$$

To je kritický (stacionární) bod. Přitom funkce  $z(t + 1) \ln(1 + \iota)$  roste monotónně v závislosti na  $t$ , takže nalevo od kritického bodu je funkce rostoucí a všude napravo je klesající a tedy funkce má v kritické bodě absolutní maximum. Dosadíme nějaké hodnoty. Při inflaci, jejíž míra je  $1/100$  dosáhne reálný stav účtu svého maxima přibližně v čase 99,5, při inflaci, jejíž míra je  $1/2$  dosáhne reálný stav účtu svého maxima přibližně v čase 19,5, Je-li míra inflace  $\frac{13}{20}$  dosáhne reálný stav účtu svého maxima přibližně v čase 1, tedy v době druhé úločky, takže vůbec nemá smysl spořit.

3.2.6.3 **Poznámka:** Reálná hodnota dosáhne maxima v bodě, který nezávisí na velikosti částek, které ukládáme. Hodnota toho maxima ovšem na velikosti ukládaných částek závisí.

3.2.6.4 **Poznámka:**

$$X''(t) = -2 \frac{z \ln(1 + \iota)}{(1 + \iota)^t} + \frac{z(t + 1) (\ln(1 + \iota))^2}{(1 + \iota)^t}$$

3.2.6.5 **Cvičení:** V jakém čase je reálná hodnota celé naspořené částky menší, než byla reálná hodnota první úločky v čase, kdy jsme ji uložili?