Početní základy finanční matematiky

sylabus 2. přednášky

(5.5)

26. 9. 2005

3.3 Úrok a lichva

Úrok od u-řéci umluviti, totiž umluvená částka, ujednaná dávka, tj. lhůtový plat z nájmu a pod (nyní jen z peněz).

Příliš (stč. přieliš) pře- a lichý vl. nadbytečný, tedy původně přebytečný odtud lichva, braní příliš vysokého úroku. Slovo je všeslovanské vyjma slovenštiny. Staroslověnské lichojimati znamená bráti úrok příliš, nad slušnou míru.

Václav Machek. Etymologický slovník jazyka českého, nakladatelství lidových novin, praha 1997

Josef Holub, Stanislav Lyer: Stručný etymologický slovník jazyka českého se zvláštnímn zřetelem ke slovům kulturním a cizím, Státní pedagogické nakladatelství praha, 1992

Živit se podvodem, lstí, triky, věštěním, lichvou a čímkoliv, co ubližuje jiným, je špatný způsob živobytí.

Sutta-Pitaka, Madžadžihima-Nikája (sbírka středních poučení Budhostického kánónu) 117

úrok, stč. = daň; roční plat, na př. z pozemku nebo za ochranu, poplatek. To, co my nazýváme úrokem, označovali Kraličtí staročeským výrazem *lichva. Hebrejština má pro tyto obchodní zvyklosti dva výrazy: „nešek" překládané výrazem lichva, t.j. úrok z peněz, a „marbít", překládané výrazy úrok, zisk. První se týkal peněžní půjčky, druhý poplatku v naturáliích, který člověk slíbil dáti tomu, kdo mu vypomohl v okamžité nouzi obilím, pokrmem, apod. *Půjčiti, půjčovati. Obojí bylo zakázáno v poměru k chudým Izraelcům

> Ex (2. Moj.) 22,25: Jestliže půjčíš stříbro někomu z mého lidu, zchudlému, který je s tebou, nebudeš se k němu chovat jako lichvář, neuložíš mu úrok.
>
> Lv (3. Moj.) 25,35-37: Když tvůj bratr zchudne a nebude moci vedle tebe obstát, ujmeš se ho jako hosta a přistěhovalce a bude žít s tebou. Nebudeš od něho brát lichvářský úrok, ale budeš se bát svého Boha. Tvůj bratr bude žít s tebou. Své stříbro mu nepůjčuj lichvářsky, na poskytované potravě nechtěj vydělávat.

ale sr.

> Dt (5. Moj.) 23.20: Svému bratru nebudeš půjčovat na úrok, na žádný úrok ani za stříbro ani za pokrm ani za cokoli, co se půjčuje na úrok.

Dt 15,7-11

> Dt 15, 7-11: Bude-li u tebe potřebný někdo z tvých bratří, v některé u tvých bran v tvé zemi, kterou ti dává Hospodin, tvůj Bůh, nebude tvé srdce zpupné a nezavřeš svou ruku před svým potřebným bratrem. Ochotně mu otvírej svou ruku a poskytni mu dostatečnou půjčku podle toho, kolik ve svém nedostatku potřebuje. Dej si pozor, aby v tvém srdci nevyvstala ničemná myšlenka, že se blíží sedmý rok, rok promíjení dluhů; že tedy budeš na svého potřebného bratra nevlídný a nedáš mu nic. On by kvůli tobě volal k Hospodinu a na tobě by byl hřích. Dávej mu štědře a nebuď skoupý, když mu máš něco dát, neboť kvůli tomu ti Hospodin, tvůj Bůh, požehná ve všem, co děláš, ve všem, k čemu přiložíš ruku. Potřebný ze země nevymizí. Proto ti přikazuji: Ve své zemi ochotně otvírej ruku svému utištěnému a potřebnému bratru.

nařizuje, aby se nuznému půjčovalo z lásky, tj. bez úroku (lichvy) a poplatků. Mezi vlastnostmi spravedlivého (=zbožného) je vypočítáno i to, že nedává na lichvu a nebere na úrok

> Ez 18,8.17: /spravedlivý. . . ./ 8) nepůjčuje lichvářsky a nebere úrok, odvrací se od bezpráví,vykonává pravdivý soud mezi mužem a mužem,. . . 17) neodtáhne svou ruku od utištěného, nevezme lichvu ani úrok,. . .

kdežto člověk, který činí pravý opak, nemůže obstát před Bohem

> Ez 18,13: /Pokud však zplodí syna rozvratníka, který bude . . . / 13) půjčovat lichvářsky a brát na úrok, bude žít? Nebude žít; dopoštěl se všech těchto ohavností, jistě zemře, jeho krev bude na něm. . .

Př 28,8

> Př 28,8: Kdo shromažďuje svůj statek lichvou a úrokem, shromažďuje jej pro toho, kdo se smilovává nad nuznými.

praví, že ten, kdo rozmnožuje svůj statek lichvou (nešek) a úrokem (tarbít, odvozeno od téhož kořene jak marbít), shromažďuje ne sobě, ale tomu, kdo bude lépe umět hospodařit s majetkem ve prospěch chudých

> Př 13,22: Dobrý zanechá dědictví vnukům, kdežto jmění hříšníka bývá uchováno pro spravedlivého.
>
> Jb 27,16-17: Kdyby někdo nakupil stříbra jak prachu a navršil oděvů jak hlíny, co navrší, to oblékne spravedlivý a stříbro připadne nevinnému.
>
> L 19.24: Své družině pak řekl: „Vezměte mu tu hřivnu a dejte ji tomu, kdo má deset hřiven!" (Podobenství o hřivnách)

U Ezd 4,13

Ezd 4,13: Nuže, známo buď králi, bude-li toto město vystavšno a jeho hradby dokončeny, že už nebudou odvádět daně, dávky z úrody ani jiné poplatky, takže královská pokladna utrpí škodu.

jde o tři druhy poplatků, které vybírali Peršané od podrobených zemí: „plat“ tj. poplatky daňové, „clo“ tj. naturální dávky a „úrok“ tj. poplatky těch, kteří užívali státních silnic. Podobně

Ezd 7,24: Buď vám také známo, že žádnému knězi ani levitovi, zpěvákovi, vrátnému, chrámovému nevolníkovi a služebníku Božího domu se nesmějí vyměřit daně, dávky z úrod a jiné poplatky.

kde perský král Artaxerxes vyňal kultický personál židovský z povinnosti daňové jakéhokoli druhu. Nejspíše platilo totéž o kněžích v Persii.

Adolf Novotný: Biblický slovník, 1956, Ústřední církevní nakladatelství, edice Kalich, 2.vydání, heslo „úrok“88

3.3.1 Úročení částek v ustáleném stavu

3.3.1.1 Zatímco inflace je spontání jev, který můžeme pozorovat, úrok vzniká z naší vůle, je to cena doby držení kapitálů a můžeme jej stanovit libovolně tak jako cenu jakéhokoliv jiného zboží ovšem v souladu se sdílenou vůlí, tedy podle nabídky a poptávky. Tak například banky stanovují úrokovou míru svévolně, bez ohledu na podmínky za nichž uzavřeli smlouvy s klienty a stydlivě tuto skutečnost oznamují jako změnu obchodních podmínek.

3.3.1.2 **Definice:** *Úrok* je přírůstek hodnoty kapitálu. *Úroková míra* je relativní hodnota tohoto přírůstku k velikosti kapitálu na počátku.

3.3.1.3 Uvažujme účet, na nějž neukládáme ani z něj nevybíráme po celou dobu $\langle t_0, t_1\rangle$. *Úrok* za dobu $\langle t_0, t_1\rangle$ je rozdíl nominálního stavu tohoto účtu. *Efektivní míra úroku* za dobu $\langle t_0, t_1\rangle$ je podíl úroku a nominální hodnoty účtu v čase t_1.

3.3.1.4 **Poznámka:** Pokud je efektivní úroková míra rovna v každém okamžiku inflaci, zůstává zachována reálná hodnota účtu. Pokud je efektivní ůroková míra 0 zůstává zachována nominální hodnota účtu.

3.3.1.5 **Poznámka:** Morální výtky půjčování openěz na úrok (U Aristotela, v Koránu, v Bibli. . .) možná nepočítají s inflací a daly by se chápat jako výtky takové úrokové míře, která je vyžší než míra inflace, protože v době, kdy je formulovali byla míra inflace nula a tento stav se považoval za samozřejmý a neměnný.

3.3.1.6 Předpokládejme, že $x(t)$ je funkce, která udává nominální stav účtu v čase t. Předpokládejme, že inflace má konstantní míru. Pokud má být zachován reálný stav účtu, musí být podle 3.2.2.12

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot (1+\xi)^t,}$$

kde ξ je efektivní úroková míra za časovou jednotku. Tuto formuli můžeme použít jako definici úročení bez ohledu na inflaci. Úrok a úročení jsou pak pojmy týkající se nominální hodnoty. Proto se dobře počítají, ale nemají reálný význam, totiž, otázku zda je úrok vysoký, nebo nízký, lze bez znalosti inflace zodpovědět jen komparací s jinými úroky a odpověď bude mít jen relativní platnost.

3.3.1.7 Vztah 3.3.1.6 má i tento význam: Pokud je ξ úroková míra (nějaké reálné číslo) za jednotku času, a pokud je hodnota nějakého kapitálu v čase t_0 rovna x je hodnota téhož kapitálu v čase t_1 rovna

$$x(t) = x_0 \cdot (1+\xi)^{t_1 - t_0}$$

3.3.1.8 **Definice:** Je-li $t_1 = 0$ nazývá se $x(t)$ v 3.3.1.7 *současná hodnota*.

3.3.1.9 **Definice:** Je-li $t_1 > 0$ nazývá se $x(t)$ v 3.3.1.7 *budoucí hodnota*.

3.3.2 Úročení

3.3.2.1 Uvažujem rovnici 3.3.1.6 v čase $t = 1$.

3.3.2.2 Buď v čase $t = 0$ stav účtu $x(0) = x_0$. Pro efektivní úrokovou míru ξ platí: stav účtu v čase $t = 1$ je

$$x(1) = x(0) \cdot (1+\xi) = x(0) \cdot \kappa$$

.

3.3.2.3 Pro úrok η platí: stav účtu v čase $t = 1$

$$x(1) = x(0) + \eta$$

.

3.3.2.4 Otázka je, jaký bude stav účtu v čase $t \neq 0$, $t \neq 1$. Nejprve se zabývejme okamžiky času, které jsou celým číslem $t \in \mathbb{N}$

3.3.2.5 Pokud budeme chtít, aby byl zachován vztah 3.3.2.3, tj. aby úrok zůstal konstantní, dostaneme:

3.3.2.5.1 • jednoduché úročení:

$$x_n = x_{n-1} + \eta$$
$$\eta = \xi \cdot x_0$$

(cena času držení kapitálu je lineární funkcí času.) Pokud budeme chtít, aby v byl zachován vztah 3.3.2.2 tj. aby efektivní úroková míra zůstala konstantní, dostaneme:

3.3.2.5.2 • složené úročení:

$$x_n = x_{n-1}.\kappa$$
$$\kappa = 1 + \xi$$

(cena času držení kapitálu je exponenciální funkcí času.)

3.3.2.6 **Poznámka:** Někdy se udává míra úroku ve zlomku, jehož jmenovatel je 100, tedy procenty (z lat pro cento = ze sta).

3.3.3 **Jednoduché úročení**. Úrok, se nepřipisuje k základu a neuročí se dále. Příkladem jednoduchého úročení jsou kupónové dluhopisy.

3.3.3.1 **Definice:** *Celá část* je zobrazení značené obvykle hranatou závorkou (argument se píše do ní) a definované předpisem: $[-]\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & n \in (x-1; x\rangle \end{cases}$

3.3.3.2 Rekursivní vztah: Jednoduché úročení je monotóním řešením rovnice 3.3.2.5.1 Tj., je-li úroková míra ξ, máme

$$x_1 = x_0(1+\xi)$$
$$x_2 = x_0(1+2\xi)$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_0(1+n\xi)$$
$$\vdots$$

Rovnice má řešení například: $x(t) = x_0 \cdot (1 + t\xi)$

nebo $x(t) = x_0 \cdot (1 + [t]\xi)$

3.3.3.3 Definujeme:

3.3.3.4 **Definice:** *Spojité jednoduché (polhůtní) úročení s efektivní úrokovou mírou* ξ je zobrazení

$$\Psi_1\colon \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_0, \xi, t) & \longmapsto & x_0 \cdot (1 + t\xi). \end{cases}$$

Diskrétní jednoduché (polhůtní) úročení s efektivní úrokovou mírou ξ je zobrazení

$$\Psi_2\colon \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_0, \xi, t) & \longmapsto & x_0 \cdot (1 + [t]\xi). \end{cases}$$

3.3.3.5 Nechť stav účtu x v čase t je určen funkcí Ψ_1 tj. $x = \Psi_1$ a ξ je efektivní úroková míra v čase 1. Pak efektivní úroková míra v čase t je $t \cdot \xi$.

3.3.3.6 **Definice:** Uvažujme nějaké úročení (jednoduché, spojité. . .) a čas t, který nazveme interval *připisování úroků*. Buď $\xi(t)$ efektivní míra úroku v čase t. Nominální úrok v čase τ definujeme jako efektivní úrok úročením definovaným funkcí Ψ_1 v čase τ.

3.3.3.7 Tedy pojem nominální a efektivní úrok při úročení Ψ_1 splývají. Je-li úročení definováno nějakou jinou funkcí (například jde-li o složené úročení), pak efektivní úrokobvá míra je definována 3.3.1.3 a jako multiplikátor udává stav účtu, zatímco nominální úroková míra je čistě formální pojem, který souvisí se stavem účtu jen nějakým přepočtem.

3.3.3.8 **Definice:** (Obchodní neboli bankovní) *diskont* je jméno pro úrok v případě, že doba, ve které počítáme stav je záporná.

Například převezme-li banka nějakou pohledávku před dobou její splatnosti, nevyplatí celou její výši, ale ponechá si diskont jako náhradu. Diskont se vyplácí při obchodování s krátkodobými cennými papíry.

3.3.3.9 **Poznámka:** o zaokrouhlování. . .

3.3.4 Složené úročení

3.3.4.1 Složené úročení je řešením funkcionální rovnice 3.3.2.5.2. Jí jsou určeny hodnoty v čase $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0(1+\xi) \\ x_2 &= x_0(1+\xi)^2 \\ x_3 &= x_0(1+\xi)^3 \\ &\vdots \\ x_n &= x_0(1+\xi)^n \\ &\vdots \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ (úroková míra je stále ξ, úrok je stále větší.) Potřebujeme dodefinovat hodnoty v čase, který není celé číslo. Uvažujme tři různá řešení rovnice 3.3.2.5.2:

3.3.4.1.1 • po částech konstantní například Φ_1: $\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_0, \xi, t) & \longmapsto & x_0 \cdot (1+\xi)^{[t]} \end{cases}$

3.3.4.1.2 • po částech afinní Φ_2: $\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_0, \xi, t) & \longmapsto & x_0 \cdot (1+\xi)^{[t]}\big(1+\xi(t-[t])\big) \end{cases}$

3.3.4.1.3 • exponenciální Φ_3: $\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_0, \xi, t) & \longmapsto & x_0 \cdot (1+\xi)^t. \end{cases}$

3.3.4.2 **Poznámka:** Φ_2 z 3.3.4.1.2 bývá nazýváno smíšené úročení. Φ_3 z 3.3.4.1.3 je identické s 3.3.1.6.
Banky používají nejčastěji úročení 3.3.4.1.1 kde doba, po kterou zústává úrok konstantní je jeden den. Úrokovou míru většinou uvádějí pro volbu jednotky času jeden rok:

3.3.4.3 **Poznámka:** Jiným příkladem po částech konstantního složeného úročení je funkce:

$$\Phi_1' \colon \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_0, \xi, t) & \longmapsto & x_0 \cdot (1+\xi)^{\frac{1}{n}\cdot[t\cdot n]} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$. Je to složené úročení s efektivní úrokovou mírou ξ v čase 1 s připisováním úroků v čase $1/n$.
Vhodnou aproximací (protože den je doba v našich úvahách většinou velice krátká) úročení 3.3.4.1.1 je a s funkcí Φ_3 se počítá mnohem lépe, než s funkcí Φ_1.

3.3.4.4 **Poznámka:** Vždy, když nebude explicitně ad hoc řečeno (napsáno) něco jiného, budeme předokládat, že úročení je s denním připisováním úroků (délka času $1/n$ je jeden den) a ve výpočtech budeme funkci Φ_1' aproximovat funkcí Φ_3 z 3.3.4.3
Úročení 3.3.4.1.2 Je dobrou počtářkou aproximací pro instituce, které musí často počítat úrok a nemají počítače ani kalkulačky, ale jen tabulky s předem vypočítanými hodnotami. Provádějí pak lineární interpolaci úroky mezi tabelovanými hodnotami. A přestože je již cena kalkulařček nižší . než cena tabulek, najdou se ústavy, které počítají úrok vztahem 3.3.4.1.2 i když na to používají programy, které by mnohem rychleji počítali hodnoty podle vztahu .

3.3.4.5 **Poznámka:** Po částech afinní úročení je pro vkladatele výhodnější, než spojité (exponennciální), protože exponenciální funkce se základem větším než 1 je konvexní a graf funkce Φ_2 tvoří sečny grafu funkce Φ_3.

3.3.4.6 **Příklad:** 21. 1. máme na kontě 10. zlatých 16. 3. uložíme dalších 10 zlatých a 7. 9. ještě 20 zlatých. Jaký bude stav účtu při roční úrokové míře 1/20 1. 1. následujícího roku?

3.3.4.7 *Řešení:* Denní úroková míra je

$$\zeta = (1+5/100)^{1/365} - 1 = \frac{1}{20} 21^{1/365} 20^{\frac{364}{365}} - 1 \doteq 0.000133681$$

a stav účtu bude 1. 1.

$$\begin{aligned} 10(1+\zeta)^{\mathrm{PocetDniDoKonceRoku}(21,1)} &+ 10(1+\zeta)^{\mathrm{PocetDniDoKonceRoku}(16,3)} \\ &+20(1+\zeta)^{\mathrm{PocetDniDoKonceRoku}(7,9)} = \\ &= 10(1+\zeta)^{344} + 10(1+\zeta)^{290} + 20(1+\zeta)^{115} = \\ &= 41{,}17564629 \end{aligned}$$

3.3.4.8 **Příklad:** Za jak dlouhou dobu bude nominální stav vašeho účtu 120 chechtáků, když v na něj čase 0 uložíte 90 chechtáků a úroková míra je 0,05 po dobu, kdy je nomiinální stav účtu menší než 100 chcetáků a 0,07 po dobu, kdy je větší, než 100

3.3.4.9 *Řešení:* Nejprve vypočítáme, za jak dlouhou dobu bude na našem účtu 100chechtáků. vyřešíme rovnici

$$90 \cdot 1{,}05^t = 100$$

její řešení je

$$T_1 := 2{,}159462208.$$

Potom vypočítáme, za jak dlouhou dobu stav účtu naroste ze 100 na 120. Rovnice

$$100 \cdot 1{,}07^t = 120$$

má řešení

$$T_2 := 2{,}694726556.$$

Nakonec obě doby sečteme. Stav účtu bude mít nominální hodnotu 100 chcetáků za dobu

$$T_1 + T_2 = 4{,}854188764$$

Přitom jednotka času je táž, v jaké je vyjádřena míra úroku. Pokud se například úroky připisují pouze v okamžicích $t = \frac{1}{365}, \frac{2}{365}, \frac{3}{365}, \ldots$ můžeme říci, že nominální stav účtu nikdy 120 nebude. Ale první okamžik, kdy můžeme na účtu s částkou 120chechtáků počítat vypočítáme takto. Nejprve určíme oprvní okamžik ($\bar{T}_1$), kdy stav účtu překročil 100chechtáků $\bar{T}_1 \geq T_1$ Je to nejbližší větší celé číslo k řešení rovnice

$$T_1 x/365$$

s neznámou x. Je to celé číslo

$$\bar{T}_1 = 789$$

a je to počet dní, po kterých budeme mít na ůčtu 100 chechtáků a nebo více. Pak spočítáme, za jak dlouho by tato částka narostla úročením na 120chechtáků:

$$90 \cdot 1{,}05^{\bar{T}_1/365} \cdot 1{,}07^t = 120$$

reálné řešení této rovnice označíme $t_2 = 2{,}693153345$ a najdeme nejblížší větší celočíselný násobek čísla $1/365$ k t_2, což je nejbližší větší celé číslo k řešení rovnice:

$$T_2 = x \cdot 1/365$$

a je to číslo

$$\bar{T}_2 := 984.$$

Počet dní, po které musíme spořit je

$$\bar{T}_1 + \bar{T}_2 = 1773$$

což je 4,857534247 let. V tu chvíli ovšem budeme na účtě mít už 120,0222245chechtáků.

3.3.4.10 **Příklad:** Při jaké úrokové míře za jenotku času je stav obou účtů po době $T := 2$ stejný, je-li na prvním na počátku $x1 = 1234$ zlatých a jednoduché úročení a na druhém na počátku $x2 := 1230$ zaltých a složeném určení?

3.3.4.11 *Řešení:* Řešení jsou kořeny rovnice:

$$1234 + 2468\,\xi = 1230\,(1+\xi)^2.$$

jde o kvadratickou rovnici, která má dvě řešení:

$$\xi = \frac{2}{615} + \frac{1}{615}\sqrt{1234},\ \xi = \frac{2}{615} - \frac{1}{615}\sqrt{1234}$$

ale jen jedno je kladné. Je to úroková míra

$$\xi = 0{,}06037127828$$

tedy 6%.

3.3.5 **Reálná úroková sazba a čistý výnos**

Předpokládejme, že vklad, zúročený za určité období (po čase $t = 1$) úrokem o míře ξ je znehodnocen inflací o míře ι. Jaký je reálný ůrok ζ?

3.3.5.1 Reálý stav účtu je $X = \frac{X_0 \cdot (1+\xi)}{(1+\iota)}$ a my hledáme takovou úrokovu sazbu ζ, pro kterou platí:

$$\frac{X_0 \cdot (1+\xi)}{(1+\iota)} = X_0 \cdot (1+\zeta)$$

máme tedy

$$\zeta = \frac{1+\xi}{1+\iota} - 1$$

3.3.5.2 Předpokládejme, že úrok, jako zisk, podléhá zdanění δ (které je vlastně úrokem ze zisku, předpokládejme, že je počítán za stejné období). Potom čistý výnos při úroku ξ z částky x_0 v čase 1 je

$$x_0\xi - \delta x_0 \xi$$

3.3.5.3 Tedy dohromady máme: Je-li míra inflace za nějaké období ι, míra úroku za toto období ξ a daň δ je čistý reálný stav účtu na konci tohoto období

$$X = X_0 \cdot \frac{1 + \xi \cdot (1-\delta)}{1+\iota}$$

pokud na počátku byla uložena částka x_0 a pak již žádná částka nebyla ani ukládána ani vybírána.

3.4 Po částech ustálený stav

3.4.0.1 **Definice:** Funkce je po částech exponenciální (skoro všude), jestliže každý bod (až na konečně mnoho výjímek) má okolí, na kterém je funkce exponenciální.

3.4.0.2 **Příklad:** Předpokládejme rok o 360 dnech s 12 měsíci po 30 dnech. Ukládáte na účet 100 kč. Účet se úročí a míra úroku je 0.05 p. a.. kolik bude na učtě na konci roku když Uložíte jen jednou a to

3.4.0.2.1 • na začátku roku

3.4.0.2.2 • v polovině roku

3.4.0.2.3 • dvakrát a to
  - na začátku roku a v polovině roku
  - v polovině roku a na konci roku

3.4.0.2.4 • dvanáctkrát a a to
  - na začátku každého měsíce
  - na konci každého měsíce.

3.4.0.3 Současnou hodnotu účtu (present value) označíme PV. Čas budeme počítat ve dnech.

$$\mathrm{PV} := \sum_{t=1}^{360} (z(t) \cdot (1+xi)^{(360-t)/360}$$

kde z_t je postupně jedna z funkcí

$$z_1 := \begin{cases} 100 & t = 1 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{PresentValue}_1 = 104{,}9857705$$

$$z_2 := \begin{cases} 100 & t = 180 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{PresentValue}_2 = 102{,}4695077$$

$$z_3 := \begin{cases} 100 & t = 1 \\ 100 & t = 180 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathrm{PresentValue}_3 = 207{,}4552782$$

$$z_4 := \begin{cases} 100 & t = 180 \\ 100 & t = 360 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathrm{PresentValue}_4 = 202{,}4695077$$

$\mathrm{PresentValue}_3 = \mathrm{PresentValue}_2 + \mathrm{PresentValue}_1$, $\mathrm{PresentValue}_4 = \mathrm{PresentValue}_2 + 100$, protože poslední úložka se už neúročí.

3.4.0.4

$$z_5 = \begin{cases} 1 & (t-1)/(30) \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ve skutečnosti zde sčítáme řadu

$$\sum_{i=1}^{12} 100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(i)} =$$

$$\begin{aligned} &= 100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(1)} + 100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(2)} + 100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(3)} + \\ &+100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(4)} + 100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(5)} + 100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(6)} + \\ &+100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(7)} + 100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(8)} + 100\ (1+\xi)^{1/30\ \mathrm{Doba}(9)} + \\ &+100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(10)} + 100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(11)} + 100\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(12)} = \\ &= 1232{,}090758, \end{aligned}$$

kde $\mathrm{Doba}\colon i \mapsto 389 - 30\,i$. Jedná se o geometrickou řadu s kvocientem

$$q = (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(i+1)}\ (1+\xi)^{\frac{1}{360}\ \mathrm{Doba}(i)} = 1{,}05^{\frac{359}{360}-i/12}\left(1{,}05^{\frac{389}{360}-i/12}\right)^{-1} t = 0{,}9959424073$$

a

$$a_1 = \left(100 \cdot (1+xi)^{\mathrm{Doba}(i)/360}\right)\Big|_{i=1} = 104{,}9857705$$

a tu můžeme sečíst podle obecného vzorce

$$\mathrm{PresentValue}_5 = \frac{a_1\ \left(1-q^{12}\right)}{1-q} = 1232{,}090758$$

3.4.0.5 Případ, kdy spoříme na konci měsíce se liší od předchozího pouze funkcí Doba a současnou hodnotou první úložky. Kvocient je stejný jako v předchozím případě a počet členů řady také:

$$\begin{aligned} z_6 &= \begin{cases} 1 & (t)/(30) \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \mathrm{Doba}&\colon i \mapsto 360 - 30\,i, \\ a_1 &= 104{,}5739528 \\ \mathrm{PresentValue}_6 &= 1227{,}257753 \end{aligned}$$

Platí

$$\frac{\mathrm{PresentValue}_5}{\mathrm{PresentValue}_6} = (1+\xi)^{\frac{29}{360}} = 1{,}00393805$$

3.4.0.6 Budeme znovu předpokládat, že se vklad v čase mění. Předpokládejme, že na účet, jehož stav je 0 postupně uložíme v okamžicích $t_0 < \cdots < t_n$ částky $z_0, \ldots z_n$. Je-li z_i záporné, znamená to, že jsme v okamžiku t_i částku $-z_i$ vybrali. Jaký je stav účtu v čase $t \geq t_n$ při konstantní úrokové míře?

3.4.0.7 Každá částka z_i se úročí po dobu $t - t_i$, tedy stav účtu v čase t je podle 3.3.1.6

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot (\xi+1)^{(t-t_i)}$$

(ξ je míra úroku za dobu 1).

3.4.0.8 Pokud jsou všechny úložky stejné $\forall i\colon z_i = z$ okamžiky ekvidistantní $\forall i\colon t_{i+1} - t_i = \Delta t$ tak řada 3.4.0.7 je geometrická řada a je-li $t_0 = 0$, $t = t_n$ má $n+1$ členů, z nichž první je ten, který dostaneme pro $i = n$ a je to z a kvocient řady je $\xi + 1$. Máme:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} z \cdot (\xi+1)^{(n-i)\cdot\Delta t} \overset{j=i-n}{=} \sum_{j=0}^{n} \cdot z \cdot (\xi+1)^{(j\cdot\Delta t)} \overset{\text{součet geometrické řady}}{=} \frac{z \cdot \left((\xi+1)^{\Delta(t)\cdot(n+1)} - 1\right)}{(\xi+1)^{\Delta(t)} - 1}$$

3.4.0.9 Podobný vzorec bychom mohli odvodit i pro jednoduché úročení, zde by řada byla aritmetická. Naším cílem je však odvodit obecnější vzorec, který by zahrnoval vzorce pro předlhůtní i polhůtní spoření, splácení dluhů a vyplácení důchodů z učebnic finanční matematiky. pojmy předlhůtní a polhůtní spoření používáme jen jako relikt tradice. Všecny problémy spoření můžeme vyřešit již provedenými úvahami nebo jejich modifikací.

3.4.0.10 Poznamenejme jen ještě, že v okamžiku, kdy nebudou intervaly úložek zcela ekvidistantní a nebo částky konstantní, pak budeme muset sečíst řadu 3.4.0.7 bez vzorečků člen po členu.

3.4.0.11 **Příklad:** Hypotéční úvěr je úvěr, za který dlužník ručí nemovitostí. O hypotékách se většinou hovoří, jsou-li půjčené peníze přímo použity na nákup nemovitosti, o amerických hypotékách, jsou-li použity na něco jiného. Protože tato záruka je dosti jistá, úrokové míry jsou většinou relativně malé (v roce 2004 $\xi = 0.04 - 0.03$). Banka poskytne hypotéční úvěr na dům většinou pouze je-li tento dům pojištěn a má-li životní pojistku i osoba, které půjčku poskytuje, což zvyšuje náklady na hypotéky přibližně o 2000 Kč měsíčně (2004). Obvyklé obchodní triky bank spočívají v tom, že si osobuje právo po určité době úrokovou sazbu svévolně a libovolně měnit (tzv. doba garance úrokové sazby je menší než doba splatnosti dluhu) a že si počítá různé poplatkly za zřízení hypotéky a její vedení.

Po odečtení všech těchto položek z částky, kterou doufáme v budoucnu disponovat, se dostáváme k odhadu toho, jak velkou půjčku si můžeme vzít.

Předpokládejme, že všechny splátky budou o stejné nominální výši z.

Úrokové míry se udávají většinou p. a., ceny nejlevnějších nemovitostí jsou v současné době kolem miliónu korun. maximální doba splátek je 15 – 20 let. V úvahu rovněž přichází i fakt, že bydlíme-li ve vlastním domě, nemusíme platit nájem, takže splácení hypotéky zatíží náš rozpočet namísto placení nájmu.

Současná hodnota dluhu je velikost úvěru, který u banky získáme.

Současná hodnota splátky o velikosti z učiněné za n měsíců tj. její hodnota v současnosti je $z(1+\xi)^{n/12}$ (první splátku splatíme měsíc po té, co dostaneme hypotéku.)

Sečteme-li současnou hodnotu všech $12n$ splátek, kde n je počet let, které budeme splácet hypotéku, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{12\,N} z\,(1+\xi)^{-i/12} = -\frac{z\left((1+\xi)^{-N}-1\right)}{-1+(1+\xi)^{1/12}}$$

což je velikost půjčky, kterou těmito splátkami splatíme. Tak například při úrokové míře 3.5% splatíme za 15 let splátkami o velikosti 11000 dluh $1.59738 \cdot 10^6$ což je v současnosti cena pěkného leč malého domku alespoň 50km od Brna, nebo garsonky v Brně.

3.4.0.12 **Příklad:** Stavební spoření. Stavební spoření je název finančního produktu, který vznikl v polovině devadesátých letech v důsledku ustanovení zákona. Jeho myšlenka byla taková, že stát (tedy všichni daňoví poplatníci) bude přispívat těm lidem, kteří si založí stavební spoření. Poklud by si založili stavební spoření všichni ve stejné výši znamenalo by to pouze, že se jim zmenší daně a že na tom zbohatnou banky. Pokud by si ovšem někdo stavební spoření nezaložil, připlácel by svými daněmi ostatním (o značnou část by je ovšem připravila banka).

Po pěti letech bylo možno naspořenou částku použít na cokoliv. To zmenšilo skupinu zájemců na ty, kteří chtěli spořit takto dlouhou dobu.

Pozdější zákon snížil velikost státních příspěvků. V původní podobě, které vydržela přes deset let byl státní příspěvek minimem ze 1/4 naspořené částky (uložená částka, úroky ze stavu z minulého roku a úrok ze státní podpory) a 4500 korun.

Protože státní příspěvek byl velký, banky nabízeli celkem malý úrok. I tak celkový výnos byl větší než u většiny jiných spoření.

Odhlédneme od možností čerpání úvěru, poplatků za zřízení a vedení účtu, většinou nehorázně vysokých a stanovíme jaký je výnos tohoto spoření.

V principu podobné jsou i systémy důcodového spoření, ovšem trvají většinou delší dobu.

Za každý rok ukládáním naspoříme častku

$$rok = \sum_{i=1}^{12} (1+\xi)^{i/12}\,.$$

Předpokládáme, že začneme spořit na začátku roku a že ukládáme měsíčně stále stejné částky, i když je výhodnější ukládat je někam jinam a posílat je do stavební spořitelny až na konci roku. Předokládáme, že ukládáme na začátku měsíce a že částky jsou dosti malé, takže státní podpora bude vždy $1/4$ z naspořené částky. Protože chceme

počítat výnosnost, můžeme si tuto částku zvolit (výnosnost je na velikosti ukládane částky nezávislá, pokud je tato dostatečně malá). Zvolme si ji rovnu jedné.
Předpokládejme dále, že státní podpora se vyplácí na začátku roku, i když tento předpoklad je hrubé přecenění schopnosti státních úředníků.
Státní podpora připsaná na začátku prvního roku se počítá z částky $R_0 = 0$ naspořené v nultém roce a je

$$SP_1 = 0$$

a naspořená částka za první rok je

$$Rok_1 = rok + Sp_0.$$

obecně pro i od dvou do pěti platí:

$$\begin{aligned} Sp_i &= 1/4\, Rok_{i-1} - 1/4\, Rok_{i-2} - 1/4\, Sp_{i-1} \\ Rok_i &= rok + (1+\xi)\, Rok_{i-1} + Sp_i\,(1+\xi) \end{aligned}$$

a šestý rok je už jen připsána státní podpora za pátý rok:

$$Rok_6 = Rok_5 + SP_6$$

výpočet provedeme postupně, nebo jedním cyklem na počítači. Dosazením 0.03 za úrokovou, míru postupně dostaneme

$$\begin{aligned} Sp_1 &= 0 Rok_1 = 12.194119, \\ Sp_2 &= 3.048529, Rok_2 = 27.894048, \\ Sp_3 &= 3.162849, Rok_3 = 44.182724, \\ Sp_4 &= 3.281456, Rok_4 = 61.082225, \\ Sp_5 &= 3.404511, Rok_5 = 78.615458, \\ Sp_6 &= 3.532180, Rok_6 = 82.147638 \end{aligned}$$

To je výnos po pěti letech ktrého dosáhneme ukládáním 1 koruny měsíčně. Pokud ji chceme porovnat s výnosem z běžného měsíčního spoření, hledáme úrokovou míru, která nám dá stejnou naspořenou částku, tj. řešíme rovnici:

$$\sum_{i=1}^{60} (1+\zeta)^{i/12} = Rok_6$$

Uvedená rovnice je rovnicí šestého stupně a proto ji musíme řešit numericky. její řešení je

$$0.1251627596$$

tj. stavební spoření s úrokem 3% a se státním příspěvkem 25% je stejně výhodné jako spoření bez státního příspěvku s úrokem 12% (zbylých 5% a patrně i více nás zbaví poplatky za vedení účtu.)