Uvažujme nějakou půjčku, kterou chceme dlouhodobě splácet. Současná hodnota všech splátek při smluvené úrokové míře je rovna současné hodnotě půjčky:

> $restart;\ A := subs\left(N = 12\,PocetLet,\ simplify\left(\sum_{t=1}^{N} x\ (1+\xi)^{\left(-\frac{1\,t}{12}\right)}\right)\right);$
> $Dluh := unapply(A, x, \xi, PocetLet);$

$$A := -\frac{\left((1+\xi)^{(-PocetLet)} - 1\right) x}{-1 + (1+\xi)^{(1/12)}}$$

$$Dluh := (x, \xi, PocetLet) \rightarrow -\frac{\left((1+\xi)^{(-PocetLet)} - 1\right) x}{-1 + (1+\xi)^{(1/12)}} \qquad (1)$$

Současná hodnota splátek při úrokové míře 0.04 *a při splátkách na dobu* 20 *let je*

> $z[1] := Dluh\left(x, \frac{4.}{100}, 20.\right);$

$$z_1 := 166.0526046\,x \qquad (2)$$

tj. můžeme si půjčit

> $subs(z[1] = 1, xxx);$

$$xxx \qquad (3)$$

násobek toho, co budeme měsíčně splácet.

Pokud nám někdo jiný nabídne půjčit peníze s úrokovou mírou 0.025, bude současná hodnota všech splátek, čili to, co si můžeme půjčit

> $\mathrm{z}[2] := \mathrm{Dluh}\left(\mathrm{x}, \frac{2.5}{100}, 20.\right);$

$$z_2 := 189.2039255\,x \qquad (4)$$

což je

> $\xi := \frac{(z[2] - z[1])}{z[2]};$

$$\xi := 0.1223617366 \qquad (5)$$

> krát více

někdo by řekl o dvanáct procent víc.

Budeme se obecněji zabývat tímto problémem: jak se projeví změna úrokové sazby na velikosti současné hodnotz nějakého finančního toku, zejména pokud je tento tok půjčkou a splácením dluhu.

>

Příklad:

> $with(plots):$

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

> *Změnu úrokove sazby vyjádříme multiplikativne (číslem δ, tak jako úrok úrokovou mírou)*

Změnu úrokove sazby vyjádříme multiplikativne (číslem δ, tak jako úrok úrokovou mírou) (6)

> $ff_1 := simplify\left(\frac{Dluh(1, \zeta\ (1+\delta), T) - Dluh(1, \zeta, T)}{Dluh(1, \zeta, T)}\right);$

$ff_2 := simplify\left(\frac{Dluh(1, \zeta\ + \delta, T) - Dluh(1, \zeta, T)}{Dluh(1, \zeta, T)}\right);$

$f := ff_1;$

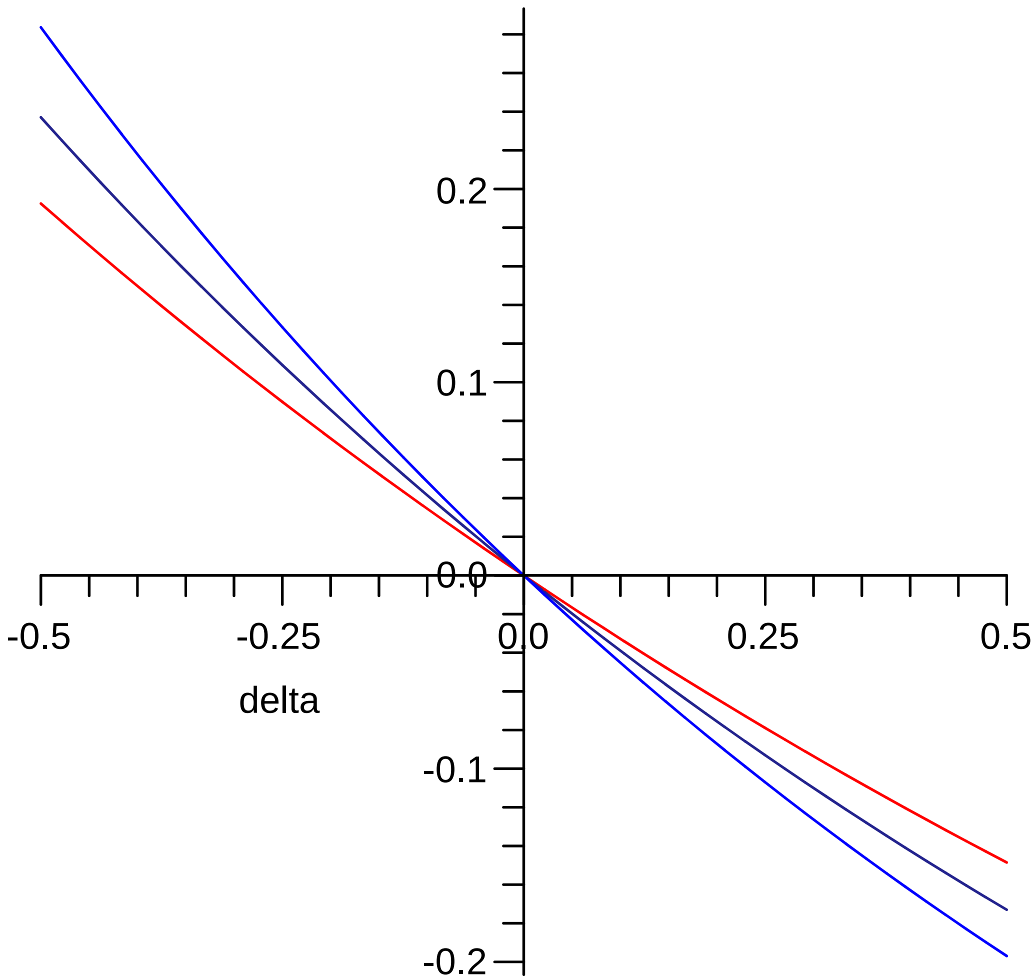
$$ff_1 := \frac{1}{\left(-1+(1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(1/12)}\right)\left(-1+(1+\zeta)^T\right)}\Big((1+\zeta)^T\,(1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(-T)} - (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)}\,(1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(-T)} + (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)} - 1 + (1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(1/12)} - (1+\zeta)^T\,(1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(1/12)}\Big)$$

$$ff_2 := \frac{1}{\left(-1+(1+\zeta+\delta)^{(1/12)}\right)\left(-1+(1+\zeta)^T\right)}\Big((1+\zeta)^T\,(1+\zeta+\delta)^{(-T)} - (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)}\,(1+\zeta+\delta)^{(-T)} + (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)} - 1 + (1+\zeta+\delta)^{(1/12)} - (1+\zeta)^T\,(1+\zeta+\delta)^{(1/12)}\Big)$$

$$f := \frac{1}{\left(-1+(1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(1/12)}\right)\left(-1+(1+\zeta)^T\right)}\Big((1+\zeta)^T\,(1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(-T)} - (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)}\,(1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(-T)} + (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)} - 1 + (1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(1/12)} - (1+\zeta)^T\,(1+\zeta+\zeta\,\delta)^{(1/12)}\Big) \qquad (7)$$

```
> A:=plot(subs(T=20,zeta=0.04,f),delta=-0.5..0.5,color=red);
  B:=plot(subs(T=30,zeta=0.04,f),delta=-0.5..0.5,color=blue);
  C:=plot(subs(T=20,zeta=0.05,f),delta=-0.5..0.5,color=navy);
  display(A,B,C);
```

$$A := INTERFACE\_PLOT(\ldots)$$
$$B := INTERFACE\_PLOT(\ldots)$$
$$C := INTERFACE\_PLOT(\ldots)$$



> To nám dává první představu o citliovosti půjčitelné čátky na úrokové míře. Pro malé změny úrokové sazby (mlá δ), má smysl vypočítt lineární část přírůstku současné hodnoty splátek (tj nahradit křívku na obrázku přímkou, kterántė křivce bude tečna). Vypočítáme tazlorův polynom stupně 1:

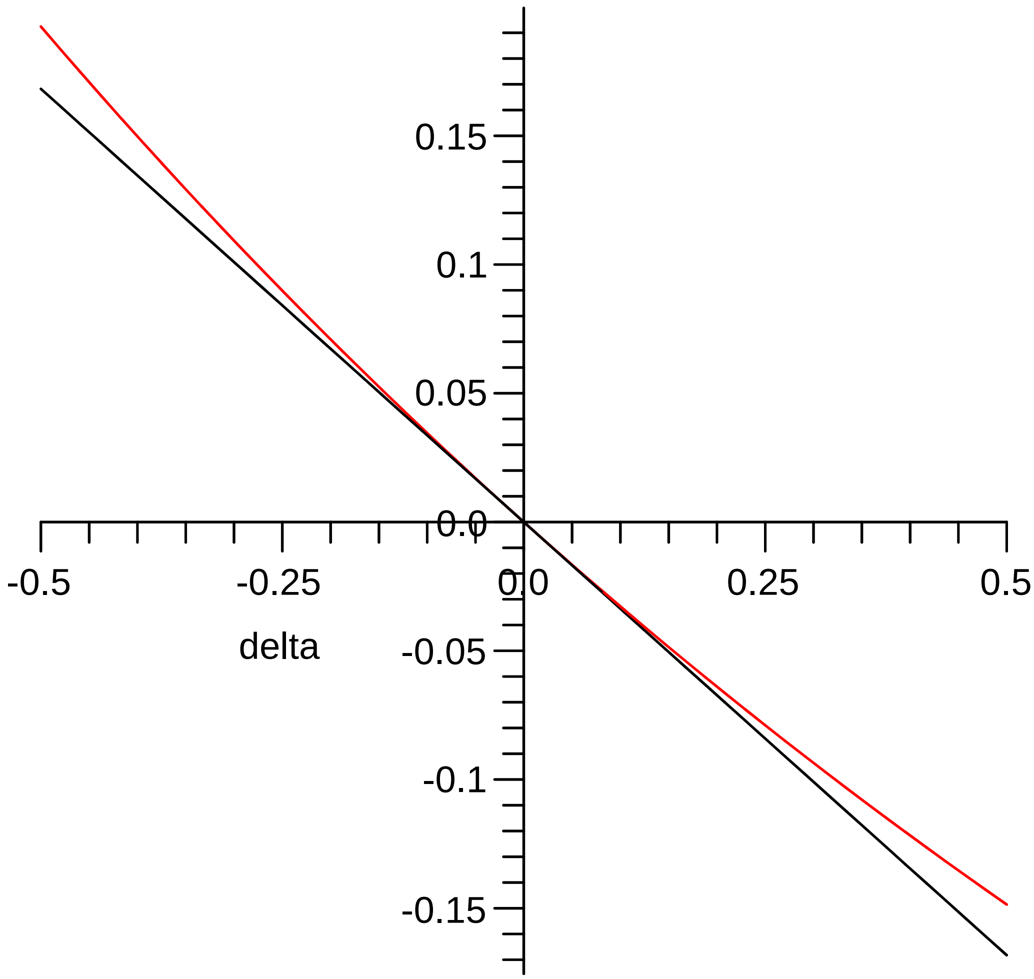
>

v našem případě:

```
> tau:=taylor(subs(T=20,zeta=0.04,f),delta=0,2);
  C:=plot(convert(tau,polynom),delta=-.5..0.5,color=black);
  display({A,C});
```

$$\tau := -0.3364440513\, \delta + O\left(\delta^2\right)$$

$$C := INTERFACE\_PLOT(\ldots)$$



obecně:

> $simplify(taylor(f, \delta = 0, 2), power, symbolic);$

$$\frac{1}{12}\,\frac{\zeta\left(-12\,T\,(1+\zeta)^{(11/12)}+1+\zeta+12\,T+12\,T\zeta-(1+\zeta)^{T}-(1+\zeta)^{T}\zeta\right)}{\left(-1+(1+\zeta)^{(1/12)}\right)(1+\zeta)^{(23/12)}\left(-1+(1+\zeta)^{T}\right)}\,\delta+\mathrm{O}\left(\delta^{2}\right) \qquad (8)$$

vzorec pro aditivni vyjdreni prirustku:

>

> $ff_2 := simplify\left(\dfrac{Dluh(1, \zeta + \delta, T) - Dluh(1, \zeta, T)}{Dluh(1, \zeta, T)}\right);$

$f := ff_2;$

$$ff_2 := \frac{1}{\left(-1+(1+\zeta+\delta)^{(1/12)}\right)\left(-1+(1+\zeta)^{T}\right)}\Big((1+\zeta)^{T}\,(1+\zeta+\delta)^{(-T)} - (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)}\,(1+\zeta+\delta)^{(-T)} + (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)} - 1$$

$$+ (1+\zeta+\delta)^{(1/12)} - (1+\zeta)^T (1+\zeta+\delta)^{(1/12)}\Big)$$

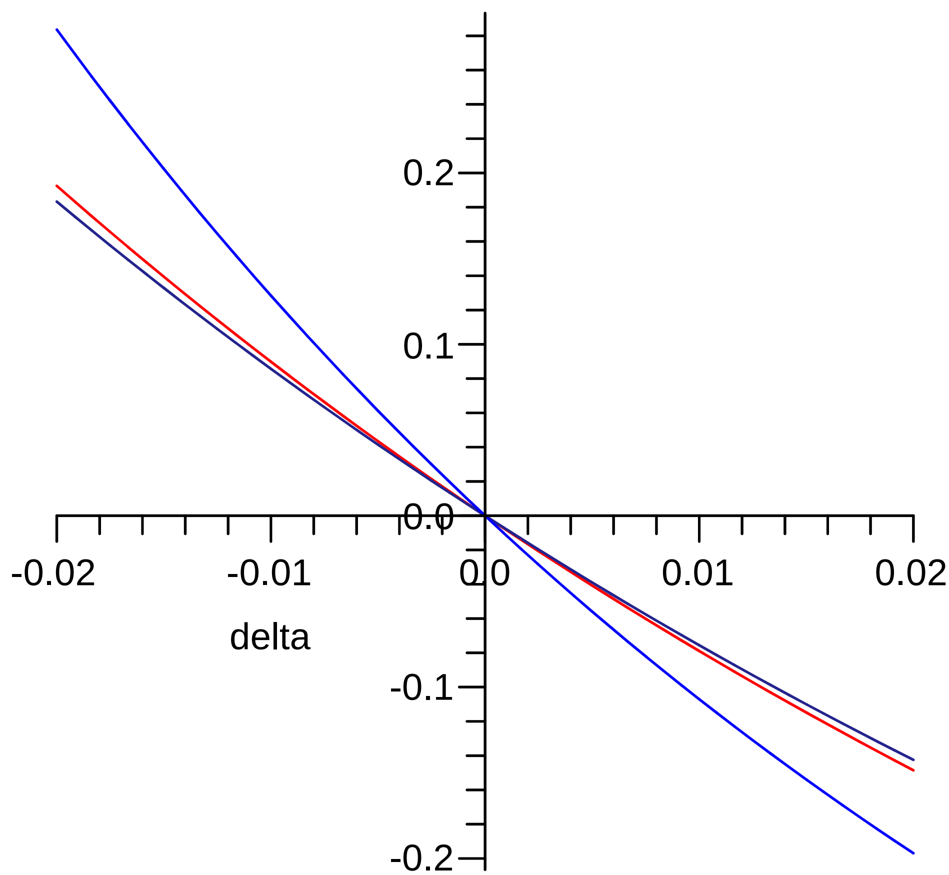
$$f := \frac{1}{\left(-1+(1+\zeta+\delta)^{(1/12)}\right)\left(-1+(1+\zeta)^T\right)} \Big((1+\zeta)^T (1+\zeta+\delta)^{(-T)} - (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)} (1+\zeta+\delta)^{(-T)} + (1+\zeta)^{\left(T+\frac{1}{12}\right)} - 1 + (1+\zeta+\delta)^{(1/12)} - (1+\zeta)^T (1+\zeta+\delta)^{(1/12)}\Big) \qquad (9)$$

```
> A:=plot(subs(T=20,zeta=0.04,f),delta=-0.02..0.02,color=red);
  B:=plot(subs(T=30,zeta=0.04,f),delta=-0.02..0.02,color=blue);
  C:=plot(subs(T=20,zeta=0.05,f),delta=-0.02..0.02,color=navy);
  display(A,B,C);
```

$$A := INTERFACE\_PLOT(\ldots)$$

$$B := INTERFACE\_PLOT(\ldots)$$

$$C := INTERFACE\_PLOT(\ldots)$$



> To nám dává první představu o citliovosti půjčitelné čátky na úrokové míře. Pro malé změny úrokové sazby (mlá δ), má smysl vypočítt lineární část přírůstku současné hodnoty splátek (tj nahradit křívku na obrázku přímkou, kteránté křivce bude tečna). Vypočítáme tazlorův polynom stupně 1:

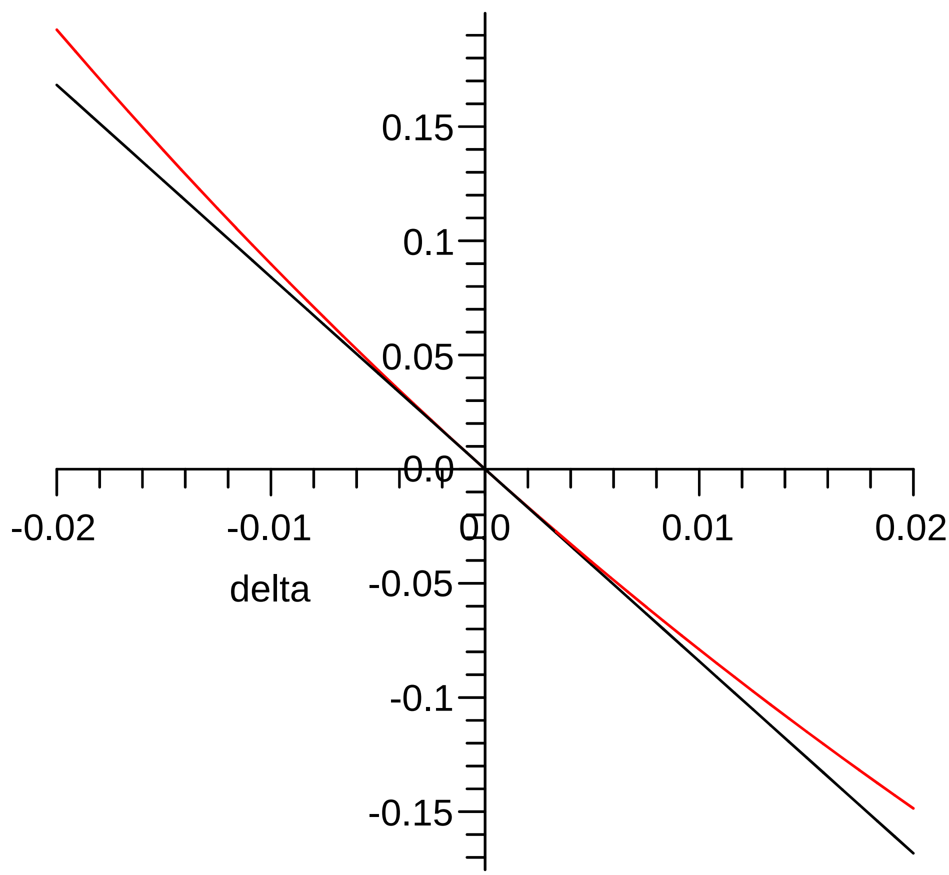
>

v našem případě:

```
> tau:=taylor(subs(T=20,zeta=0.04,f),delta=0,2);
  C:=plot(convert(tau,polynom),delta=-.02..0.02,color=black);
  display({A,C});
```

$$\tau := -8.411101277\,\delta + O\left(\delta^2\right)$$

$$C := INTERFACE\_PLOT(\ldots)$$



obecně:

> $simplify(taylor(f, \delta = 0, 2), power, symbolic);$

(10)

$$\frac{1}{12}\frac{1}{\left(-1+(1+\zeta)^{(1/12)}\right)\left(-1+(1+\zeta)^{T}\right)(1+\zeta)^{(23/12)}}\Big(-12\,T\,(1+\zeta)^{(11/12)}+1+\zeta + 12\,T + 12\,T\zeta - (1+\zeta)^{\left(T-\frac{11}{12}\right)}(1+\zeta)^{(11/12)} - (1+\zeta)^{\left(T-\frac{11}{12}\right)}(1+\zeta)^{(11/12)}\zeta\Big)\delta + O\left(\delta^2\right) \tag{10}$$

>

>

(x -2)/alpha=1

```
> x-y=1;
```

$$x-y=1 \tag{11}$$

>

$x-1=0$

$$x-1=0 \tag{12}$$

$\rightarrow\ \{x=1\}$