Masarykova univerzita v Brně
Ekonomicko–správní fakulta

Matematika E

Luboš Bauer
Miloslav Mikulík

- Úvod do maticového počtu
- Systémy lineárních algebraických rovnic, úvod
- Zavedení pojmu inverzní matice
- Základní poznatky z kapitoly 1 a úlohy k procvičení

1. Základní pojmy lineární algebry

Cíl kapitoly

Cílem studia této kapitoly je

- osvojit si provádění těchto operací s maticemi: násobení matice číslem, sečítání dvou matic, násobení dvou matic
- osvojit si pojmy: relace „$\leq, \geq, <, >, =$“ mezi maticemi
- osvojit si pojmy: jednotková matice, nulová matice, diagonální matice, horní a dolní trojúhelníková matice, horní schodovitá matice
- naučit se zapsat systém lineárních rovnic užitím maticové notace a umět rozhodnout, zda nějaký vektor je nebo není řešením daného systému lineárních algebraických rovnic

1.1 Úvod do maticového počtu

Pojem matice

V denním životě se často setkáváme s různými tabulkami čísel. Jedná se vlastně o skupinu čísel zapsaných do několika řádků a několika (třeba jiného počtu) sloupců.

Příkladem je např. tabulka, v níž je uvedena spotřeba surovin, označme je S_1, $\ldots, S_m$, potřebná při výrobě výrobků, které označíme $V_1, \ldots, V_n$. Spotřeba je uvedena v nějakých v úloze specifikovaných jednotkách.

Následující tabulka charakterizuje výrobu v čokoládovně při výrobě 5 druhů výrobků, označených jako V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. V našem příkladě se uvádí spotřeba surovin S_1, S_2, S_3, to jest po řadě tuku, kakaa a cukru v kg na 1 kg každého z výrobků $V_1, \ldots, V_5$. Např. při výrobě 1 kg výrobku V_2 spotřebujeme $0,4$ kg tuku.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
tuk	$0,00$	$0,4$	$0,3$	$0,6$	$0,6$
kakao	$0,05$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	$0,0$
cukr	$0,10$	$0,2$	$0,2$	$0,1$	$0,2$

Tabulka 1.1: Tabulka pro výrobu v čokoládovně

Vynecháme-li záhlaví v tabulce, jedná se o uspořádanou skupinu 15 čísel, zapsaných do tří řádků a pěti sloupců. Pro takové uspořádané skupiny čísel si zavedeme následující definicí pojem *matice.*

Definice 1.1. Maticí typu (m, n) budeme rozumět každou uspořádanou skupinu $m \cdot n$ reálných čísel zapsaných do m řádků a n sloupců. Každé z těchto čísel budeme nazývat prvkem matice. Abychom vyznačili, že tato čísla vytvářejí matici, budeme tuto skupinu čísel dávat do kulatých závorek.

Matice typu $(m, 1)$ je tedy uspořádaná skupina m reálných čísel zapsaných do jednoho sloupce. Budeme ji nazývat sloupcovým vektorem. Prvky této matice nazýváme též složkami vektoru.

Matice typu $(1, n)$ je tedy uspořádaná skupina n reálných čísel zapsaných do jednoho řádku. Budeme ji nazývat řádkovým vektorem. Prvky této matice nazýváme též složkami vektoru.

Řádky matice typu (m, n) jsou řádkovými vektory a sloupce matice jsou sloupcovými vektory.

Označování. Matice budeme označovat většinou velkými tučně vytištěnými písmeny, např. $\boldsymbol{A}$. Prvek matice , umístěný v jejím i–tém řádku a v j–tém sloupci, budeme většinou označovat malým písmenem, odpovídajícímu označení matice, s indexy i, j, umístěnými u jeho dolního pravého rohu. Tedy $a_{i,j}$ bude značit prvek matice $\boldsymbol{A}$ v jejím i–tém řádku a v j–tém sloupci. Pokud nemůže dojít k chybě, lze čárku mezi indexy vynechat.

Příklad 1.1. Výše uvedenou tabulku vyznačíme tedy jako matici typu $(3, 5)$ následovně:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Příklad 1.2. V následujícím příkladě je $\boldsymbol{A}$ maticí typu $(2, 3)$, vektor $\boldsymbol{b}$ je řádkový vektor se 4 složkami, $\boldsymbol{c}$ je sloupcový vektor se 4 složkami.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Je tedy např. $a_{2,3} = 7$.

Označování. *Matici* $\boldsymbol{A}$ *typu* (m, n) *můžeme tedy zapsat takto*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(1, n)$, to jest, jestliže

$$\boldsymbol{A} = (a_{1,1}\ a_{1,2}\ \dots a_{1,n}), \tag{1.3}$$

potom ji nazýváme též řádkovým vektorem, jak bylo již uvedeno. Budeme jej většinou označovat tučně vytištěným malým písmenem. Poněvadž u všech prvků je první index stejný, roven 1, lze jej většinou vypouštět. Místo nahoře uvedené matice (1.3) můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{a} = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n).$$

Podobně, jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(m, 1)$, to jest, jestliže

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

potom ji můžeme nazývat též sloupcovým vektorem, jak již bylo uvedeno. Budeme jej většinou označovat tučně vytištěným malým písmenem. Poněvadž u všech prvků je druhý index stejný, roven 1, budeme jej většinou vypouštět. Místo (1.4), můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \\ a_m \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Příklad 1.3. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 23 & 16 & 6 \\ 5 & 7 & 19 & 3 & 0 \\ 2 & 20 & 22 & 14 & 18 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

je typu $(3, 5)$

Příklad 1.4. Označme D_1, D_2 místa, z nichž se provádí rozvoz do míst Z_1, Z_2, Z_3. Označme c_{ij} náklady v Kč na dopravu 1 tuny zboží z místa D_i do místa Z_j pro $i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3$. Z čísel c_{ij} utvoříme matici, např.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2000 & 1500 & 1800 \\ 800 & 50000 & 1000 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Jde o matici typu $(2, 3)$. V této matici je např. $c_{13} = 1800$, to znamená, že náklady na dopravu jedné tuny zboží z místa D_1 do místa Z_3 jsou 1800 Kč.

Příklad 1.5. Uveďme matici popisující cenu v \$ tří druhů zboží V_1, V_2, V_3 ve čtyřech různých zemích Z_1, Z_2, Z_3, Z_4.

$$C = \begin{pmatrix} 230 & 450 & 100 \\ 200 & 420 & 90 \\ 210 & 430 & 80 \\ 235 & 435 & 95 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Zde c_{ij} značí cenu zboží V_j v \$ v zemi Z_i. Poněvadž $c_{23} = 90$, je cena zboží V_3 v zemi Z_2 rovna 90 \$.

Uveďme ještě příklady matic, které obsahují jenom jeden řádek, tedy příklady řádkových vektorů.

Příklad 1.6. Uvažujme výrobní závod, v jehož dvou provozovnách se vyrábějí stejné čtyři různé výrobky, označme je V_1, V_2, V_3, V_4. Označme a_i počet výrobků V_i, které se mají denně vyrobit v první provozovně a b_i počet výrobků V_i, které se mají denně vyrobit v druhé provozovně. Potom vektor $\boldsymbol{a} = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ charakterizuje denní výrobní plán první provozovny a vektor $\boldsymbol{b} = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$ charakterizuje denní výrobní plán druhé provozovny. Je-li tedy např.

$$\boldsymbol{a} = (1\ 5\ 8\ 6), \quad \boldsymbol{b} = (4\ 6\ 1\ 2), \tag{1.9}$$

potom např. $a_2 = 5$ znamená, že první provozovna má denně vyrobit podle plánu 5 výrobků V_2. Druhá provozovna má podle plánu vyrobit těchto výrobků $b_2 = 6$.

Zatím jsme pouze uvedli způsob zápisu uspořádané skupiny čísel, se kterými je vhodné v dalším *pracovat jako s celkem.* V dalším budeme většinou odhlížet od věcného významu jednotlivých prvků matic a ukážeme možnosti, jak lze s maticemi pracovat.

1.1.1 Relace mezi maticemi

Mezi maticemi téhož typu si zavedeme následující relace. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice téhož typu (m, n).

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je menší nebo rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} \leq b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je menší než matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} < b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je větší nebo rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} \geq b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je větší než matice $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} > b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad 1.7. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přesvědčte se, že $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$.

Příklad 1.8. Přesvědčte se, že mezi maticemi $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

neplatí žádná z relací $<, \leq, >, \geq, =$.

1.1.2 Základní operace s maticemi

Zaveďme si tyto operace s maticemi.

Součet matic

Sečítání dvou matic. Začněme s několika motivačními příklady. Nahoře v příkladě 1.6 jsme uvažovali vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, dané vztahy (1.9). Vektor $\boldsymbol{a}$ představuje denní výrobní plán první provozovny a $\boldsymbol{b}$ představuje denní výrobní plán druhé provozovny. Jestliže se ve výrobním závodě vyrábějí uvedené výrobky pouze v těchto dvou provozovnách, pak denní plán výroby výrobků V_1, V_2, V_3, V_4 celého závodu je zřejmě

$$\boldsymbol{c} = (5 \ 11 \ 9 \ 8),$$

kde $c_i = a_i + b_i$, pro $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Jeví se proto užitečným označit vektor $\boldsymbol{c}$ jako součet vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

Příklad 1.9. Nechť podnik vyrábí výrobky V_1, V_2, V_3 ve dvou provozovnách. Plán výroby výrobků V_1, V_2, V_3 v první provozovně podniku je pro jednotlivé kvartály charakterizován maticí $\boldsymbol{A}$ a výroba ve druhé provozovně je pro jednotlivé kvartály charakterizována maticí $\boldsymbol{B}$. Obě matice jsou typu $(4, 3)$. Nechť prvek $a_{i,j}$ matice $\boldsymbol{A}$ udává plánovaný počet výrobků V_j v i–tém kvartálu v první provozovně. Analogický význam má prvek $b_{i,j}$ matice $\boldsymbol{B}$. Tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} \end{pmatrix}.$$

Pokud závod vyrábí uvedené výrobky pouze v těchto dvou provozovnách, lze charakterizovat plán výroby výrobků V_1, V_2, V_3 celého podniku pro jednotlivé kvartály maticí $\boldsymbol{C}$, jejíž prvek $c_{i,j} = a_{i,j}+b_{i,j}$ představuje plán výroby výrobku V_j v i–tém kvartálu celého podniku. Tedy

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3}+b_{1,3} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3}+b_{2,3} \\ a_{3,1}+b_{3,1} & a_{3,2}+b_{3,2} & a_{3,3}+b_{3,3} \\ a_{4,1}+b_{4,1} & a_{4,2}+b_{4,2} & a_{4,3}+b_{4,3} \end{pmatrix}.$$

Z těchto příkladů je patrno, že má smysl definovat součet dvou matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ téhož typu podle následující definice.

Definice 1.2. (Součet dvou matic) Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou téhož typu (m, n). Součtem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ budeme rozumět matici $\boldsymbol{C}$ typu (m, n), pro jejíž prvky $c_{i,j},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$, platí

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Pro operaci sečítání matic budeme používat symbolu „+“. Píšeme pak $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Příklad 1.10. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice typu $(3, 3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ je

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 9 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Násobení matice číslem. V příklade 1.5 jsme uvedli matici $\boldsymbol{C}$. Číslo $c_{i,j}$ v ní značí cenu v \$ výrobku V_j v zemi Z_i. Chceme-li vyjádřit cenu jednotlivých výrobků v uvažovaných zemích v Kč, stačí násobit každý prvek matice $\boldsymbol{C}$ stejným číslem, daným kurzem dolaru. Vzniklou matici označíme $\boldsymbol{D}$. Počítáme-li 35 Kč za jeden \$, dostáváme matici

Násobení matice číslem

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 8050 & 15750 & 3500 \\ 7000 & 14700 & 3150 \\ 7350 & 15050 & 2800 \\ 8225 & 15225 & 3325 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

udávající cenu jednotlivých výrobků v uvažovaných zemích v Kč.

To nás motivuje k zavedení definice součinu čísla a matice takto:

Definice 1.3. (Součin čísla a matice) Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n) a α je reálné číslo. Potom součinem matice $\boldsymbol{A}$ a čísla α rozumíme matici $\boldsymbol{C}$, pro jejíž prvky $c_{i,j}$ platí

$$c_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j} \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Pro násobení matice číslem budeme používat symbol „$\cdot$“. Píšeme pak $\boldsymbol{C} = \alpha \cdot \boldsymbol{A}$. Symbol „$\cdot$“ lze vynechat.

Příklad 1.11. Nechť $\alpha = 3$ a nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(3, 3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\boldsymbol{C} = \alpha \cdot \boldsymbol{A} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 18 & 3 & 9 \\ -6 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Definice 1.4. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice téhož typu. Potom definujme $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ jako matici $\boldsymbol{A} + (-1) \cdot \boldsymbol{B}$.

Součin dvou matic – motivace

Součin dvou matic. Zaveďme si ještě definici součinu dvou matic. Začneme s příkladem. Uvažujme matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

V ní $a_{i,j}$ značí spotřebu v kg $i-$té suroviny S_i na výrobu jednoho kilogramu $j-$tého výrobku V_j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Zapišme tuto matici obecně.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Má-li se vyrobit x_j kg výrobku V_j, spotřebuje se při jeho výrobě $a_{i,j} \cdot x_j$ kg suroviny S_i. Uvažujme případ, že chceme vyrobit výrobky V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 v množstvích x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 v kg a že chceme určit spotřebu suroviny S_i pro některé $i = 1, 2, 3$. Označme ji y_i. Potom y_i je součtem čísel $a_{i,j} \cdot x_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Tedy

$$y_i = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + a_{i,3} \cdot x_3 + a_{i,4} \cdot x_4 + a_{i,5} \cdot x_5.$$

Označme tedy $\boldsymbol{x}$ sloupcový vektor o pěti složkách, v němž x_j udává požadované množství výrobku V_j v kg.Označme $\boldsymbol{y}$ sloupcový vektor o třech složkách, v němž y_i vyjadřuje množství suroviny S_i v kg potřebné k výrobě výrobků $V_j,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$ v požadovaných množstvích x_j. Nazveme jej vektorem spotřeby. Tedy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Označme

$$y_i = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + a_{i,3} \cdot x_3 + a_{i,4} \cdot x_4 + a_{i,5} \cdot x_5, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.14}$$

Budeme říkat, že vektor $\boldsymbol{y}$ je součinem matice $\boldsymbol{A}$ a vektoru $\boldsymbol{x}$ a budeme psát

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Pro vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ 120 \\ 150 \\ 85 \\ 80 \end{pmatrix}$$

a matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,40 & 0,3 & 0,6 & 0,60 \\ 0,05 & 0,20 & 0,10 & 0,10 & 0,00 \\ 0,10 & 0,20 & 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,00 \cdot 250 + 0,4 \cdot 120 + 0,3 \cdot 150 + 0,6 \cdot 85 + 0,6 \cdot 80, \\ y_2 &= 0,05 \cdot 250 + 0,2 \cdot 120 + 0,1 \cdot 150 + 0,1 \cdot 85 + 0,0 \cdot 80, \\ y_3 &= 0,10 \cdot 250 + 0,2 \cdot 120 + 0,2 \cdot 150 + 0,1 \cdot 85 + 0,2 \cdot 80. \end{aligned}$$

Vyčíslením obdržíme $y_1 = 192,\ y_2 = 60,\ y_3 = 103$. Tedy

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 192.0 \\ 60.0 \\ 103.5 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad nás inspiruje k zavedení pojmu součinu dvou matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ touto definicí.

Součin matic – definice

Definice 1.5. (Součin matic) Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m,k) a $\boldsymbol{B}$ je matice typu (k,n). Potom součinem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ v tomto pořadí je matice $\boldsymbol{C}$ typu (m,n) pro jejíž prvky $c_{ij}, i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n$, platí

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}. \tag{1.15}$$

Píšeme pak

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Poznámka 1. Ze vztahu (1.15) je patrno, že pro výpočet prvku c_{ij} matice $\boldsymbol{C}$ (tj. prvku v i–tém řádku a v j–tém sloupci matice $\boldsymbol{C}$ používáme i–tý řádek

$$(a_{i,1}\ a_{i,2}\ \dots\ a_{i,k}) \tag{1.16}$$

matice $\boldsymbol{A}$ a j–tý sloupec matice $\boldsymbol{B}$

$$\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \dots \\ b_{k,j} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Říkáme, že $c_{i,j}$ je skalárním součinem řádkového vektoru (1.16) a sloupcového vektoru (1.17).

Poznámka 2. Vztah (1.15) lze zapsat takto

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^{k} a_{i,r} \cdot b_{r,j}.$$

Zde symbol $\sum_{r=1}^{k}$ znamená, že se provádí sečítání členů, které dostaneme tak, že do výrazu za symbolem $\sum$ dosazujeme postupně $r = 1,\dots,k$.

Poznámka 3. Pro součin dvou matic budeme používat opět symbolu „$\cdot$“. To není na závadu, neboť ze souvislostí je vždy patrno o jaké násobení se jedná. Budeme tedy psát

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Poznámka 4. Všimněme si, že počet sloupců v matici $\boldsymbol{A}$ je stejný jako je počet řádků v matici $\boldsymbol{B}$. Kdyby tomu tak nebylo, nebylo by možno aplikovat vzorec (1.15).

Příklad 1.12. Určete matici $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, jestliže

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \\ 8 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poněvadž $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(3,4)$ a $\boldsymbol{B}$ je matice typu $(4,2)$, lze vypočíst součin $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Podle (1.15) dostáváme

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 73 & -6 \\ 17 & -12 \end{pmatrix}.$$

Např. prvek $c_{2,1}$ dostaneme jako skalární součin druhého řádku matice $\boldsymbol{A}$, to jest řádkového vektoru

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

a prvního sloupce matice $\boldsymbol{B}$, to jest sloupcového vektoru

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem dostáváme

$$c_{2,1} = 0 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 5 \cdot (-1) = 73.$$

Poznámka 5. Obecně matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ není rovna matici $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. Dokonce může nastat případ, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ existuje, avšak $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ neexistuje. Jestliže pro nějaké matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A},$$

potom matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ se nazývají *zaměnitelné*.

Příklad 1.13. Je-li např. matice $\boldsymbol{A}$ typu $(3,4)$ a matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(4,3)$, potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ je matice typu $(3,3)$. Avšak $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ je matice typu $(4,4)$. Jsou tedy matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ různých typů a tedy, aniž bychom jejich součiny počítali, vidíme, že jsou navzájem různé. Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nejsou tedy v tomto případě zaměnitelné.

Příklad 1.14. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, takže tyto matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nejsou zaměnitelné.

Příklad 1.15. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 \\ -1/6 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Pro tyto matice platí

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Dané matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou tedy zaměnitelné.

Matice transponovaná.

Definice 1.6. (Matice transponovaná) Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m,n). Potom matici, jejíž i–tý řádek je roven i–tému sloupci matice $\boldsymbol{A}$, $i=1,2,\ldots,m$, nazýváme maticí transponovanou k matici $\boldsymbol{A}$ a budeme ji značit $\boldsymbol{A^T}$. Matice $\boldsymbol{A^T}$ je tedy typu (n,m).

Příklad 1.16. Nechť

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}.$$

Potom

$$\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}.$$

O transponované matici součinu dvou matic platí tato věta.

Věta 1.1. (Transponovaná matice součinu matic) *Nechť* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *jsou takové matice, že existuje* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$. *Potom platí*

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{B^T}\cdot\boldsymbol{A^T}.$$

Důkaz: Důkaz přenechávám čtenáři. □

Submatice. Zaveďme si pojem submatice následující definicí.

Submatice

Definice 1.7. (Submatice) Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m,n) a nechť $\boldsymbol{u}=(i_1,\ldots,i_p)$ je takový vektor, že $1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le m$. Dále nechť $\boldsymbol{v}=(j_1,\ldots,j_r)$ je takový vektor, že $1\le j_1<j_2<\cdots<j_q\le n$. Potom matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním řádků s řádkovými indexy, které jsou složkami vektoru $\boldsymbol{u}$ a vypuštěním sloupců matice $\boldsymbol{A}$ se sloupcovými indexy, které jsou složkami vektoru $\boldsymbol{v}$, nazýváme submaticí matice $\boldsymbol{A}$ a značíme ji $\boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$. Jestliže některý z vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ má jenom jednu složku, stačí uvést tuto složku bez závorek. Například, jestliže $\boldsymbol{u}=(i)$ a $\boldsymbol{v}=(j)$, lze závorky vypustit a psát pouze $\boldsymbol{A}_{i,j}$. (Tedy $\boldsymbol{A}_{i,j}$ značí submatici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním i–tého řádku a j–tého sloupce.)

Příklad 1.17. Nechť

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&7&2&-1\\4&1&0&2\end{pmatrix}.$$

Položme $\boldsymbol{u} = (2)$, $\boldsymbol{v} = (2, 4)$. Potom vypuštěním druhého řádku a druhého a čtvrtého sloupce matice $\boldsymbol{A}$ dostaneme submatici $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_{2,(2,\,4)}$. Je tedy

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Speciální matice a pravidla pro počítání s maticemi

Čtvercová matice. Matici $\boldsymbol{A}$ typu (n, n) budeme nazývat *čtvercovou maticí řádu* n. Místo čtvercová matice řádu n stačí říkat matice řádu n, poněvadž o řádu matice mluvíme jen u čtvercových matic.

Např. matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice řádu 3.

Nulová matice. Matici typu (m, n) budeme nazývat nulovou maticí typu (m, n), jestliže všechny její prvky jsou rovny nule. Budeme ji značit $\mathbf{0}$.

Příklad 1.18. Matice

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je nulová matice typu $(3, 4)$.

Hlavní a vedlejší diagonála v matici. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n). Budeme říkat, že její prvky a_{ii} leží na hlavní diagonále a její prvky a_{ij}, pro něž je $i + j = n + 1$, leží na vedlejší diagonále.

Příklad 1.19. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 8 & 5 \\ -5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom prvky $(1, -3, 4)$ leží na hlavní diagonále a prvky $(1, 8, 0)$ leží na vedlejší diagonále.

Jednotková matice. Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{E}$ řádu n je jednotková, jestliže všechny prvky na hlavní diagonále jsou rovny číslu 1 a všechny ostatní její prvky jsou rovny 0. Chceme-li zdůraznit její řád n, označíme ji $\boldsymbol{E}_n$.

Příklad 1.20. Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je jednotková matice řádu 3.

Diagonální matice. Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ je diagonální, jestliže všechny její nenulové prvky leží na hlavní diagonále.

Příklad 1.21. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je diagonální maticí.

Horní trojúhelníková matice. Řekneme, že čtverová matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je horní trojúhelníkovou maticí, jestliže všechny její prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny 0.

Dolní trojúhelníková matice. Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je dolní trojúhelníkovou maticí, jestliže všechny její prvky nad hlavní diagonálou jsou rovny 0.

Pravidla pro počítání s maticemi. Pro zavedené operace s maticemi platí vztahy uvedené v následující větě.

Věta 1.2. (Počítání s maticemi) *Nechť $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \mathbf{0}$ jsou matice téhož typu, kde $\mathbf{0}$ je matice nulová, a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom platí*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}, & (1.18)\\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}), & (1.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}+\mathbf{0} &= \boldsymbol{A}, & (1.20)\\ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A} &= \mathbf{0}, & (1.21)\\ 1\cdot\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}, & (1.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{A}) &= (\alpha\cdot\beta)\cdot\boldsymbol{A}, & (1.23)\\ (\alpha+\beta)\cdot\boldsymbol{A} &= \alpha\cdot\boldsymbol{A}+\beta\cdot\boldsymbol{A}, & (1.24)\\ \alpha\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \alpha\cdot\boldsymbol{A}+\alpha\cdot\boldsymbol{B}. & (1.25) \end{aligned}$$

Důkaz: Provedeme pouze důkaz vztahu (1.18). Ostatní vztahy se dokazují analogicky.

Prvek v i–tém řádku a j–tém sloupci matice na levé straně vztahu (1.18) je roven $a_{ij}+b_{ij}$ a prvek v i–tém řádku a j–tém sloupci matice na pravé straně vztahu (1.18) je roven $b_{ij}+a_{ij}$ pro všechna i, j. Platí tedy (1.18). $\square$

Věta 1.3. (Počítání s maticemi) *Nechť typy matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\mathbf{0}$ (nulová matice), $\boldsymbol{E}$ (jednotková čtvercová matice) jsou takové, že operace ve vztazích*

(1.26)—(1.31) *mají význam. Potom platí*

$$\begin{aligned} \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{A} &= \mathbf{0},\ \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}, & (1.26)\\ \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}, & (1.27)\\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{A}, & (1.28)\\ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}), & (1.29)\\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}, & (1.30)\\ \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}. & (1.31) \end{aligned}$$

Poznámka. Jestliže pro matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$, nemusí být žádná z matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nulovou maticí. Např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

1.2 Systémy lineárních algebraických rovnic, úvod

Uvažujme výrobu čtyř výrobků V_1, V_2, V_3, V_4. K jejich výrobě jsou potřebné suroviny S_1, S_2, S_3. Jejich množství v kg potřebné při výrobě jednoho kilogramu každého z výrobků V_1, V_2, V_3, V_4 je uvedeno v následující tabulce. Ve sloupci označeném písmenem Z jsou uvedena množství Z_1, Z_2, Z_3 jednotlivých surovin S_1, S_2, S_3, která se mají spotřebovat. Budeme se zabývat úlohou určit množství jednotlivých výrobků V_1, V_2, V_3, V_4 v kg tak, abychom zcela spotřebovali suroviny S_1, S_2, S_3, jejichž množství jsou uvedena v tabulce ve sloupci Z.

	V_1	V_2	V_3	V_4	Z
S_1	$0,0$	$0,4$	$0,3$	$0,6$	5
S_2	$0,2$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	2
S_3	$0,1$	$0,2$	$0,2$	$0,1$	3

Označme postupně x_1, x_2, x_3, x_4 hledaná množství v kg výrobků V_1, V_2, V_3, V_4. K jejich výrobě by se potřebovalo

$$0,4\,x_2 + 0,3\,x_3 + 0,6\,x_4$$

kg surovin S_1,

$$0,2\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,1\,x_3 + 0,1\,x_4$$

kg surovin S_2 a

$$0,1\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,2\,x_3 + 0,1\,x_4$$

kg surovin S_3.

Jestli se mají suroviny S_1, S_2, S_3 plně spotřebovat, musí se výrobky V_1, V_2, V_3, V_4 vyrábět v množstvích x_1, x_2, x_3, x_4, která splňují tyto podmínky:

$$\begin{aligned} 0,4\,x_2 + 0,3\,x_3 + 0,6\,x_4 &= 5\\ 0,2\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,1\,x_3 + 0,1\,x_4 &= 2 \qquad (1.32)\\ 0,1\,x_1 + 0,2\,x_2 + 0,2\,x_3 + 0,1\,x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Každá z těchto podmínek představuje rovnici pro neznámé veličiny x_1, x_2, x_3, x_4. Každá z nich je tvaru

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b. \tag{1.33}$$

V rovnici (1.33) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou neznámé a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou (většinou) známá čísla, nazýváme je koeficienty rovnice. Koeficient a_i je koeficient u neznámé x_i. Číslo b nazýváme pravou stranou. Rovnici (1.33) nazýváme lineární algebraickou rovnicí o neznámých $x_1, \ldots, x_n$. Poněvadž v lineární algebře, kterou probíráme, pojednáváme jenom o algebraických rovnicích, budeme užívat zkráceného pojmenování „lineární rovnice“.

Při řešení úloh většinou se pracuje s více rovnicemi. Jestliže koeficienty v těchto rovnicích jsou obecná čísla, můžeme je odlišit od sebe tak, že v i–té rovnici označíme koeficient u x_j např. $a_{i,j}$.

Potom systém (místo systém můžeme říkat též soustava) m lineárních algebraických rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lze zapsat takto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m.
\end{array} \tag{1.34}$$

Zde $a_{i,j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, značí koeficient u neznámé x_j v i–té rovnici (první index i tedy značí pořadové číslo rovnice, druhý index j označuje složku neznámého vektoru $\boldsymbol{x}$). Číslo b_i nazýváme pravou stranou i–té rovnice.

Označme $\boldsymbol{A}$ matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

Nazýváme ji *maticí soustavy systému* (1.34). Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nazýváme *vektorem neznámých* a vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nazýváme *vektorem pravých stran.*

Lehce nahlédneme, že systém lineárních algebraických rovnic (1.34) lze zapsat užitím tohoto označení jako

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{1.36}$$

Skutečně, matice $\boldsymbol{A}$ je typu (m, n), $\boldsymbol{x}$ je typu $(n, 1)$, takže $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ je matice typu $(m, 1)$. Rovnice (1.36) znamená, že každá složka vektoru $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ je rovna odpovídající složce vektoru $\boldsymbol{b}$. Porovnáním i–tých složek těchto vektorů dostáváme i–tou rovnici systému (1.34).

Matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ přidáním vektoru $\boldsymbol{b}$ jako dalšího sloupce, se nazývá *rozšířenou maticí systému rovnic* (1.34). Značíme ji $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Je tedy

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & | & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & | & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & | & b_m \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.22. Uvažujme systém lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -12, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & -6. \end{array} \tag{1.37}$$

Označme-li $\boldsymbol{A}$ matici soustavy tohoto systému rovnic, $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran a $\boldsymbol{x}$ vektor neznámých tohoto systému rovnic, je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Matice rozšířená je rovna

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & | & -12 \\ 4 & 5 & 2 & | & -6 \end{pmatrix}.$$

Daný systém rovnic lze tedy zapsat jako

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Zaveďme si nyní pojem řešení systému lineárních rovnic.

Definice 1.8. Vektor ${}^0\boldsymbol{x}$ nazveme řešením systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

jestliže $\boldsymbol{A} \cdot {}^0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. (To jest, jestliže vektor ${}^0\boldsymbol{x}$ vyhovuje rovnici $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$).

Vraťme se k příkladu 1.22. Označme

$$ {}^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad {}^3\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. $$

Zřejmě

$$ \boldsymbol{A} \cdot {}^1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^3\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{b}. $$

Jsou tedy vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ řešením uvažovaného systému (1.37), avšak ${}^3\boldsymbol{x}$ není jeho řešením.

Lehce se přesvědčíme, že vektor

$$ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 - 3 \cdot c \\ -6 + 2 \cdot c \\ c \end{pmatrix} $$

je řešením uvažovaného systému rovnic (1.37) pro každé reálné c.

Příklad 1.23. Uvažujme systém lineárních rovnic

$$ x_1 - 2x_2 = 3, \tag{1.38} $$
$$ 2x_1 - 4x_2 = 5. \tag{1.39} $$

Tento systém rovnic nemá řešení. Skutečně, předpokládejme, že α, β jsou taková čísla, že $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ vyhovovují první rovnici, tedy, že platí

$$ \alpha - 2 \cdot \beta = 3. $$

Potom by bylo

$$ 2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta = 6 $$

a ne $2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta = 5$, takže $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta$ nevyhovuje druhé rovnici.

Poznámka. Později budeme řešit obecně otázku, kdy systém lineárních rovnic má jedno řešení, kdy má nekonečně mnoho řešení a kdy nemá vůbec žádné řešení.

1.3 Zavedení pojmu inverzní matice

V lineární algebře má velký význam pojem inverzní matice k dané matici. Tento pojem si nyní zavedeme následující definicí. Později si řekneme něco o existenci inverzní matice k dané matici a seznámíme se s řadou vlastností inverzních matic a naučíme se nalézt k dané matici matici inverzní.

Definice 1.9. (Inverzní matice) Neřádu n. Potom čtvercovou matici $\boldsymbol{B}$ se pro níž platí

$$ \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}. \tag{1.40} $$

nazýváme inverzní maticí k matici $\boldsymbol{A}$; budeme ji značit $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Věta 1.4. (Vlastnosti inverzní matice) *Nechť je dána matice $\boldsymbol{A}$ a nechť k ní existuje matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$. Potom platí*

a) *Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ je jednoznačně určena.*
b) *K matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ existuje matice inverzní a platí $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.*
c) *Jestliže $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou čtvercové matice téhož řádu n a jestli k nim existují matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$, potom k matici $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ existuje matice inverzní platí $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$.*

Důkaz:

a) Nechť $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ jsou inverzní k $\boldsymbol{A}$. Potom

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Odtud

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}.$$

Tedy $\boldsymbol{B}$=$\boldsymbol{C}$.

b) Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem definice inverzní matice.

c) Podle vět 1.2, 1.3 platí

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}.$$

Poněvadž $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, dostáváme odtud

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}.$$

Podobně dokážeme, že

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{E}.$$

Je tedy $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ inverzní maticí k matici $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. □

Uveďme si zde větu o řešitelnosti a jednoznačnosti řešení systému lineárních rovnic, za předpokladu, že k matici soustavy existuje matice inverzní.

Věta 1.5. (Řešení systému $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) *Nechť*

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1.41}$$

je systém n lineárních rovnic o n neznámých, kde $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice soustavy řádu n a $\boldsymbol{b}$ je vektor pravých stran typu $(n, 1)$. Nechť k matici $\boldsymbol{A}$ existuje matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$. Potom systém rovnic (1.41) má právě jedno řešení $\boldsymbol{x}$ dané vztahem

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{1.42}$$

Důkaz: Jak již bylo dříve dokázáno, inverzní matice $\boldsymbol{A}$ je určena jednoznačně. Vynásobíme-li (1.41) maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva, dostáváme

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b} \tag{1.43}$$

Vzhledem k větě 1.3 platí

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}.$$

Poněvadž $(\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, dostáváme odtud (1.42).

Dokažme ještě jednoznačnost řešení. Předpokládejme, že existují dvě řešení ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}$ systému (1.41). Potom

$$\boldsymbol{A} \cdot {}^1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Odečtením těchto vztahů dostáváme

$$\boldsymbol{A} \cdot ({}^1\boldsymbol{x} - {}^2\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Vynásobením tohoto vztahu maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva dostáváme

$${}^1\boldsymbol{x} - {}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

takže

$${}^1\boldsymbol{x} = {}^2\boldsymbol{x}.$$

Má tedy systém $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ právě jedno řešení. $\square$

Příklad 1.24. Nalezněte řešení systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{1.44}$$

jestliže

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 78 \end{pmatrix}$$

a znáte-li k matici $\boldsymbol{A}$ matici inverzní

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{4}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{11}{39} \end{pmatrix}.$$

Řešení. Podle předcházející věty má daný systém právě jedno řešení a to

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{4}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{11}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 78 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem dostáváme

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

V této kapitole popsaný aparát maticového počtu použijeme nyní k matematické formulaci následující úlohy, která patří do úloh lineárního programování. Tyto úlohy jsou velice významnou aplikací lineární algebry. Úlohy tohoto typu se řeší většinou pomocí počítačů a k jejich řešení jsou vypracovány speciální programy. My se nebudeme zde zabývat otázkou jak se řeší, ale jenom otázkou, jak se dá úloha matematicky formulovat a jak se připraví data pro vstupní hodnoty těchto programů.

Příklad 1.25. Čokoládovna vyrábí 5 druhů výrobků. Jsou to výrobky, které označíme V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. K výrobě potřebujeme suroviny tuk, kakao a cukr. Tyto suroviny jsou k dispozici v omezených množstvích, v uvedném pořadí 1500 kg, 300 kg, 450 kg na jeden den. Spotřeba surovin v kilogramech na 1 kg výrobku je dána tabulkou 1.1 na straně 4. Odbytové ceny jednotlivých výrobků v uvedném pořadí jsou 20 Kč, 120 Kč, 100 Kč, 140 Kč, 40 Kč. Úkolem je stanovit takový denní výrobní plán, aby hodnota výroby byla maximální. Výrobky jsou vyráběny technologicky nezávisle na sobě navzájem. Výroba se tedy uskutečňuje ve formě pěti výrobních procesů, které však nejsou navzájem zcela izolované, neboť společně spotřebovávají výrobní zdroje, jeden proces na úkor druhého.

Matematická formulace úlohy. Pro účely matematické formulace zaveďme 5 nezávisle proměnných: x_j nechť označuje množství výrobku V_j v kg, jež bude vyráběno za den, kde $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Hledáme tedy hodnoty $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$, vyhovující nerovnostem

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0,4x_2 & + & 0,3x_3 & + & 0,6x_4 & + & 0,6x_5 & \leq & 1500 \\ 0,05x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,1x_3 & + & 0,1x_4 & & & \leq & 300 \\ 0,10x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,1x_4 & + & 0,2x_5 & \leq & 450 \end{array} \tag{1.45}$$

Víme, že při výrobě x_j výrobků V_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, bude odbytová cena výroby rovna

$$z = 20x_1 + 120x_2 + 100x_3 + 140x_4 + 40x_5. \tag{1.46}$$

Naší úlohu můžeme tedy formulovat takto : Nalezněte taková nezáporná čísla x_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, která vyhovují nerovnostem (1.45) a pro něž funkce (1.46) nabývá svého maxima.

Tato úloha je tedy popsána maticí $\boldsymbol{A}$, vektorem $\boldsymbol{m}$ množství surovin a vektorem $\boldsymbol{b}$ odbytových cen výrobků a vektorem $\boldsymbol{x}$ počtu výrobků

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 300 \\ 450 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 20 \\ 120 \\ 100 \\ 140 \\ 40 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Potom (1.45) lze zapsat jako jako

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{m} \tag{1.47}$$

a funkce (1.46) lze zapsat jako

$$z = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{1.48}$$

Naši úlohu můžeme vyslovit takto: Nalezněte vektor $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ vyhovující (1.47), který minimalizuje funkci (1.48).

Matice $\boldsymbol{A}$, vektory $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{b}$ a požadavek, že vektor

$$\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq \boldsymbol{0},$$

jsou vstupními údaji programu, kterým se výpočet realizuje. Dostáváme

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1000,\ x_4 = 2000,\ x_5 = 0.$$

1.4 Základní poznatky z kapitoly 1 a úlohy k procvičení

- Zavedení pojmu matice, typ matice, značení prvků matic, prvky na hlavní a na vedlejší diagonále.
- Relace $<, \leq, >, \geq, =$ mezi maticemi.
- Operace s maticem : sečítání matic, násobení matice reálným číslem.
- Součin dvou matic.
- Zaměnitelné matice.
- Matice transponovaná. Matice transponovaná součinu dvou matic.
- Submatice. Vytváření submatic. Označování submatic.
- Speciální matice. Matice čtvercová, matice nulová, matice jednotková, horní a dolní trojúhelníková matice, horní schodovitá matice.
- Pravidla pro počítání s maticemi.
- Zápis systémů lineárních rovnic v maticové notaci. Co je to matice soustavy, co je to matice rozšířená, co je to vektor pravých stran. Co se rozumí pod pojmem řešení systému lineárních rovnic? Příklady, kdy systém má jedno řešení, kdy nemá žádné řešení, kdy má více řešení.
- Co je to inverzní matice? Vlastnosti inverzních matic.
- Řešení systému lineárních rovnic, jestliže známe matici inverzní k matici soustavy.

Úlohy

1. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Určete a) její typ, b) matici k ní transponovanou $\boldsymbol{A}^T$, určete matice $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$, c) zjistěte, zda matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^T$ jsou zaměnitelné.

[a) typ (3, 4), b) $\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 & 2 \\ -3 & 10 & -8 & -7 \\ 9 & -8 & 57 & -16 \\ 2 & -7 & -16 & 45 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 30 & 7 & 13 \\ 7 & 54 & -24 \\ 13 & -24 & 30 \end{pmatrix}$, c) nejsou zaměnitelné.]

2. Zapište v maticové notaci systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 &= 4, \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 - 3\,x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Napište matici soustavy a matici rozšířenou.
[Označme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 4 \\ 3 & -5 & 1 & | & -1 \\ 1 & -3 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Potom daný systém rovnic lze psát v maticové notaci takto: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$ je matice soustavy a $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ je matice rozšířená.]

3. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a nechť $\boldsymbol{E}_3$ je jednotková matice a λ je proměnná. Napište matici

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}_3.$$

$$[B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{pmatrix}.]$$

4. Zjistěte, zda vektory

$${}^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

jsou řešením systému lineárních rovnic z úlohy 2.

[$\boldsymbol{A} \cdot {}^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} \cdot {}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, tedy ${}^1\boldsymbol{x}$ je a ${}^2\boldsymbol{x}$ není řešením uvažovaného systému lineárních rovnic.]

5. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & -12 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Dokažte, že $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$. Jak nazýváme matici $\boldsymbol{B}$?
b) Nalezněte řešení rovnice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ užitím matice $\boldsymbol{B}$. (Obě strany daného systému rovnic násobte zleva maticí $\boldsymbol{B}$.)
[a) $\boldsymbol{B}$ je inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, b) $\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b}$, takže $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 & -31 & 18 \end{pmatrix}^T$.]

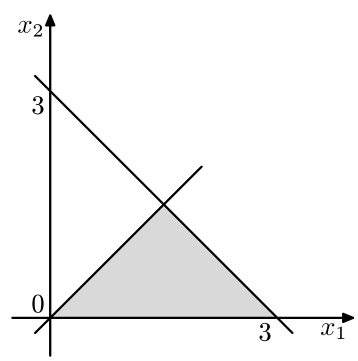
6. Zapište následující systém nerovnic užitím maticové notace

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3, \\ -x_1 + x_2 &\leq 0, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Znázorněte graficky množinu bodů $[x_1, x_2]$, které těmto nerovnicím vyhovují.
[Položme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Potom daný systém nerovnic lze zapsat takto: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$. Hledaná množina je šedá oblast na obr.1.1.]



Obrázek 1.1: Hledaná množina bodů

7. Určete vektory $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{x}$ tak, aby funkce

$$y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4$$

se dala pomocí nich zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{x}.$$

$$[\boldsymbol{f} = (2, 3, 4, 1)^T, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T]$$

- Lineární prostor, zavedení pojmu
- Lineární kombinace vektorů
- Báze vektorového prostoru

2. Vektorový prostor

Cílem studia této kapitoly je

- osvojit si pojem „aritmetický vektorový prostor $\mathbb{V}_n$“
- osvojit si pojmy „lineární kombinace vektorů, lineární nezávislost vektorů“
- osvojit si pojem „hodnost matice“

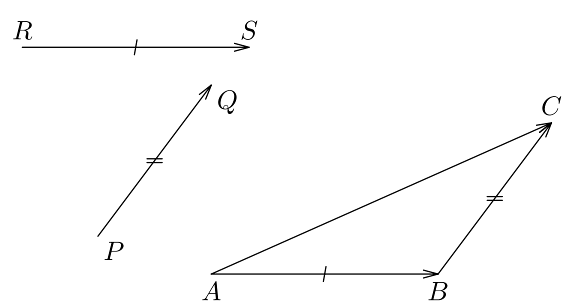
2.1 Lineární prostor, zavedení pojmu

Vektorový prostor volných vektorů. V předcházejícím studiu na gymnáziu jste pracovali s volnými vektory. Zopakujme si napřed bez podrobností pojem volného vektoru a operace s volnými vektory a to tak, jak se tyto pojmy zavádějí na gymnáziích.

Volné vektory. Množinu všech nenulových orientovaných úseček, které mají stejný směr a stejnou velikost, jste nazvali *nenulovým volným vektorem* a množinu všech nulových orientovaných úseček *nulovým volným vektorem*. Každá orientovaná úsečka je pak umístěním příslušného volného vektoru a reprezentuje jej. Volné vektory budeme označovat písmenem se šipkou nahoře, např. $\overrightarrow{a}$. Nulový volný vektor budeme označovat symbolem $\overrightarrow{0}$. Délku každé orientované úsečky, která reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{a}$, budeme nazývat *velikostí volného vektoru* $\overrightarrow{a}$ a budeme ji značit $|\overrightarrow{a}|$.

Symbolem „+“ jste značili operaci, nazvali jste ji sečítáním, kterou ke každým dvěma volným vektorům $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ je přiřazen volný vektor, označme jej $\overrightarrow{c}$, který dostaneme takto: Zvolme libovolný bod A. Nechť $\overrightarrow{AB}$ je orientovaná úsečka, která reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{a}$. Nechť orientovaná úsečka $\overrightarrow{BC}$ reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{b}$, potom orientovaná úsečka $\overrightarrow{AC}$ reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{c}$. Píšeme pak $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$.

Na obr. 2.1 je znázorněno sečítání dvou volných vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$ a volný vektor $\overrightarrow{b}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{RS}$. Jejich součtem je volný vektor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AC}$.



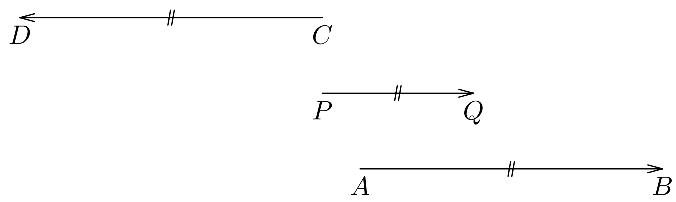
Obrázek 2.1: Sečítání volných vektorů

Symbolem „·“ jste značili operaci, nazvali jste ji násobením, kterou ke každému volnému vektoru $\overrightarrow{a} \in U$ a libovolnému reálnému číslu $\alpha \in \mathbb{R}$ je přiřazen volný vektor, označme jej $\overrightarrow{d}$, který dostaneme takto: Nechť orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{a}$. Označme D takový bod na přímce určené body A, B , že velikost $\left|\overrightarrow{AD}\right|$ orientované úsečky $\overrightarrow{AD}$ je

$$|\alpha| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

a směr $\overrightarrow{AD}$ je stejný jako směr $\overrightarrow{a}$, je-li $\alpha \geq 0$ a opačný, je-li $\alpha < 0$.

Na obr. 2.2 je znázorněno násobení volného vektoru $\overrightarrow{a}$ reálným číslem. Volný vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$. Volný vektor $\overrightarrow{d} = 2,5 \cdot \overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ a volný vektor $\overrightarrow{e} = -2,5 \cdot \overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CD}$.



Obrázek 2.2: Násobení volného vektoru číslem

Volné vektory v kartézském souřadném systému v rovině. V předcházejícím pojednání jsme uvažovali volné vektory nezávisle na souřadném systému. Byly uvažovány v tzv. invariantním tvaru.

Pojednejme nyní o volných vektorech v rovině, v níž je zaveden kartézský souřadný systém. Nechť x_1, x_2 jsou souřadné osy kartézského souřadného systému v uvažované rovině.

Jak je dobře známo, ke každému bodu P v kartézském souřadném systému roviny, je přiřazena uspořádaná dvojice reálných čísel $[p_1, p_2]$. Číslo p_1 nazýváme jeho první souřadnicí a číslo p_2 nazýváme jeho druhou souřadnicí. Naopak, každou uspořádanou dvojici reálných čísel $[p_1, p_2]$ lze považovat za souřadnice právě jednoho bodu P v rovině. Není tedy nutno striktně rozlišovat mezi bodem v rovině a uspořádanou dvojicí reálných čísel. Označme $\mathbb{U}_2$ množinu všech volných vektorů v této rovině s uvedenými operacemi sečítání volných vektorů v rovině a násobení volných vektorů v rovině reálnými čísly.

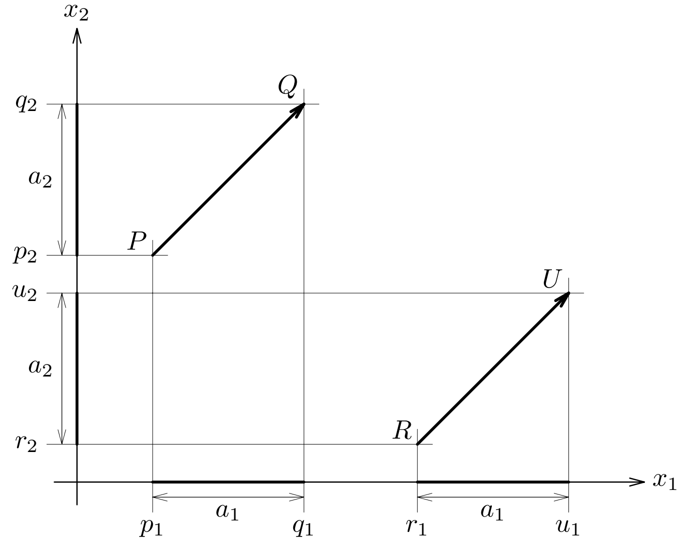
Uvažujme dvě orientované úsečky $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RU}$ (viz. obr. 2.3), kde

$$P = P[p_1, p_2],\ Q = Q[q_1, q_2],\ R = R[r_1, r_2],\ U = U[u_1, u_2].$$

Každá z těchto orientovaných úseček reprezentuje tentýž volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_2$, když a jenom když

$$q_1 - p_1 = u_1 - r_1 \ \wedge\ q_2 - p_2 = u_2 - r_2. \tag{2.1}$$

Na obr. 2.3 jsou zobrazeny dvě orientované úsečky $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}$ každá z nich reprezentuje tentýž volný vektor.



Obrázek 2.3: Reprezentace volného vektoru

Nechť $\overrightarrow{a}$ je volný vektor, reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$, kde $P = [p_1, p_2], Q = [q_1, q_2]$. K volnému vektoru $\overrightarrow{a}$ přiřaďme uspořádanou dvojici reálných čísel, a_1, a_2, kde $a_1 = q_1 - p_1$ je první a $a_2 = q_2 - p_2$ je druhé číslo této uspořádané dvojice. Tuto uspořádanou dvojici zapišme např. jako (a_1, a_2). Platí též obráceně. Jestliže (a_1, a_2) je libovolná uspořádaná dvojice reálných čísel, potom k ní je přiřazen volný vektor, který je reprezentován každou orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$, pro níž platí: Je-li $P = [p_1, p_2], Q = [q_1, q_2]$ potom $q_1 - p_1 = a_1, q_2 - p_2 = a_2$. Lze tedy ke každému volnému vektoru $\overrightarrow{a}$ jednojednoznačně přiřadit uspořádanou dvojici (a_1, a_2). Množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel označíme $\mathbb{R}^2$.

Lehce nahlédneme, že platí následující tvrzení. Nechť $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ jsou dva volné vektory. Nechť nahoře popsaným způsobem je k volnému vektoru $\overrightarrow{a}$ přiřazena uspořádaná dvojice reálných čísel (a_1, a_2) a k volnému vektoru $\overrightarrow{b}$ je přiřazena uspořádaná dvojice reálných čísel (b_1, b_2). Potom zřejmě platí

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}, \quad \text{kde} \quad c_1 = a_1 + b_1 \wedge c_2 = a_2 + b_2 \tag{2.2}$$

$$\alpha.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{d}, \quad \text{kde} \quad d_1 = \alpha.a_1 \wedge d_2 = \alpha.a_2 \quad \text{pro} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Mezi uspořádanými dvojicemi reálných čísel z $\mathbb{R}^2$ si zaveďme operace sečítání, označené „ + “, a násobení, označené „ . “, takto: Nechť $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$. Položme

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$\alpha.(a_1, b_1) = (\alpha.a_1, \alpha.b_1)$$

Množinu $\mathbb{R}^2$ společně s operacemi „+, . “ nazveme dvojrozměrným aritmetickým vektorovým prostorem a označíme jej $\mathbb{V}_2$. Jeho prvky nazveme (aritmetickými) vektory a budeme je označovat většinou malými tučně zapsanými písmeny. Analogicky bychom mohli definovat trojrozměrný aritmetický vektorový prostor na množině $\mathbb{R}^3$ uspořádaných trojic reálných čísel. Značí se pak $\mathbb{V}_3$.

Vzhledem k (2.2) si můžeme představit dvojrozměrný aritmetický vektor jako volný vektor v rovině. Podobně je tomu v trojrozměrných aritmetických vektorových prostorech.

V dalším podáme analogickou definici n-rozměrného aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$.

Definice 2.1. Nechť n je libovolné přirozené číslo a nechť $\mathbb{R}^n$ je množina všech uspořádaných $n-$tic reálných čísel. Nechť na množině $\mathbb{R}^n$ jsou zavedeny operace sečítání, označené „ + ", a násobení, označené „ . ", takto:
Nechť $(a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$. Položme

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \quad (2.4)$$
$$\alpha.(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\alpha.a_1, \alpha.a_2, \cdots, \alpha.a_n) \quad (2.5)$$

Množinu $\mathbb{R}^n$ společně s operacemi „+, . " nazveme $n-$rozměrným aritmetickým vektorovým prostorem a označíme jej $\mathbb{V}_n$. Uspořádané $n-$tice budeme zapisovat do řádků, nebo do sloupců. Budeme je nazývat (aritmetickými) vektory a budeme je označovat většinou malými tučně zapsanými písmeny. Při zápisu této uspořádané $n-$tice do řádku (sloupce), budeme mluvit o řádkovém (sloupcovém) aritmetickém vektoru (stručně jen o vektoru).

S pojmem vektorového prostoru úzce souvisí pojem vektorového podprostoru. Uveďme si jeho definici.

Co je to vektorový podprostor

Definice 2.2. [(Vektorový podprostor)] Nechť $P \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P, \alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in P, \quad \alpha \cdot \boldsymbol{x} \in P. \quad (2.6)$$

Potom množinu P s těmito operacemi „+, ·" nazýváme vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^n$. Budeme jej značit $\mathbb{P}$.

Poznámka. Jestliže nepracujem s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$ můžeme místo názvu „vektorový podprostor" používat názvu „vektorový prostor".

Příklad 2.1. Nechť P je taková množina uspořádaných čtveřic reálných čísel $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, že $a_2 = a_4$. Zřejmě $P \subseteq \mathbb{R}^4$. Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, c, a_3, c)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, d, b_3, d)$, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in P$. Položme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, c + d, a_3 + b_3, c + d)$, $\boldsymbol{y} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot c, \alpha \cdot a_3, \alpha \cdot c)$. Zde operace „+" , „·" jsou operace sečítání a násobení v prostoru $\mathbb{V}_4$. Je zřejmé, že $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ patří do množiny P. Proto množina P s těmito operacemi „+" , „·" tvoří vektorový podprostor $\mathbb{P}$ prostoru $\mathbb{V}_4$.

Ukažme si některé základní vlastnosti vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$.

Věta 2.1. *Nechť $\mathbb{P}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$. Jestliže $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{P}_n$, potom*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \quad (2.7)$$
$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}. \quad (2.8)$$

Existuje prvek $\mathbf{0} \in \mathbb{V}_n$ *tak, že pro všechna* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}_n$ *platí*

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}. \tag{2.9}$$

Nazýváme jej nulovým vektorem.
Ke každému $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ *existuje vektor v prostoru* $\mathbb{P}_n$, *označme jej (-*$\boldsymbol{x}$*), tak, že*

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}. \tag{2.10}$$

Pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}_n$ *a pro všechna* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *platí*

$$
\begin{aligned}
1.\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}, && (2.11)\\
\alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) &= (\alpha\beta) \cdot \boldsymbol{x}, && (2.12)\\
(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} &= \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}, && (2.13)\\
\alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}. && (2.14)
\end{aligned}
$$

Poznámka. Symbol „$\cdot$“ pro násobení lze vynechat.

Důsledek 1. *Ze vztahů (2.7), (2.8) vyplývá, že*

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) = \\
&= \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} = \\
&= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

Není proto nutno psát závorky a stačí psát $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

Dokažme např., že $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$. Podle (2.8) je $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$. Podle (2.7) je $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$, takže $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$. Je tedy $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$.

Podobně budeme psát $c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n \cdot {}^n\boldsymbol{x}$, kde ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}$ a $c_1, \ldots, c_n$ jsou libovolné konstanty, aniž bychom psali závorky.

Poznámka. Jestliže vektor z prostoru $\mathbb{P}_n$ zapíšeme do sloupce, budeme vektor nazývat sloupcovým vektorem. Jedná se tedy o matici typu $(n, 1)$.

Podobně, jestliže vektor zapíšeme do řádku, budeme jej nazývat řádkovým vektorem. Jde tedy o matici typu typu $(1, n)$.

Zapisujeme-li tedy všechny vektory v prostoru $\mathbb{P}_n$ do sloupců (řádků), potom operace „$+, \cdot$“ v prostoru $\mathbb{P}_n$ splývají s odpovídajícími operacemi pro počítání s maticemi.

Poznámka. Symbol „$\cdot$“ pro násobení lze vynechat.

Označení. Místo $\boldsymbol{a} \in P$ lze psát $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$. Místo $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ lze psát $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

2.2 Lineární kombinace vektorů

Uvažujme systém lineárních algebraických rovnic

$$a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Při jeho analýze je zapotřebí zjišťovat, zda

- některá z rovnic systému není v rozporu s jinými rovnicemi tohoto systému
- zda každá z rovnic dává nové požadavky na hledaný vektor $x_1, \ldots, x_n$,
- zda požadavek, některou rovnici vyjádřený, je nebo není již obsažen v jiných rovnicích systému.

Tuto problematiku budeme řešit podrobně v kapitole **??**.

Jestliže i-té rovnici systému (2.15) přiřadíme vektor $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}, b_i), i = 1, 2, \cdots, n$, pak toto přiřazení je jednojednoznačné. K součtu dvou rovnic odpovídá součet odpovídajících vektorů a k součinu čísla a rovnice odpovídá součin tohoto čísla a odpovídající rovnice.

K řešení nahoře uvedeného problému použijeme dále zaváděné pojmy: lineární kombinace vektorů, lineární nezávislost a lineární závislost vektorů. S těmito pojmy se setkáme i v jiných úvahách.

Lineární kombinace vektorů

Definice 2.3. (Lineární kombinace vektorů) Nechť ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ jsou vektory z vektorového prostoru $\mathbb{P}$ a $c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla. Potom vektor

$$\boldsymbol{x} = c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x}$$

nazveme *lineární kombinací vektorů* ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$.

Příklad 2.2. Nechť

$${}^1\boldsymbol{x} = (2, 3, -1),\ {}^2\boldsymbol{x} = (5, 2, 6),\ {}^3\boldsymbol{x} = (9, 8, 4)$$

jsou vektory z prostoru $\mathbb{V}_3$. Ukažme, že vektor ${}^3\boldsymbol{x}$ je lineární kombinací vektorů ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$.

Poněvadž

$$2 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + {}^2\boldsymbol{x} = 2 \cdot (2, 3, -1) + (5, 2, 6) = (4, 6, -2) + (5, 2, 6) = (9, 8, 4) = {}^3\boldsymbol{x},$$

je vektor ${}^3\boldsymbol{x}$ skutečně lineární kombinací vektorů ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$.

Lineární nezávislost vektorů

Definice 2.4. (Lin. nezávislost a závislost vektorů) Nechť ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ jsou vektory z vektorovém prostoru $\mathbb{P}$. Řekneme, že tyto vektory jsou *lineárně nezávislé*, jestliže

$$c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0. \qquad (2.16)$$

Jestliže vektory ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ nejsou lineárně nezávislé, jsou *lineárně závislé*.

Lineární závislost vektorů lze vyjádřit též takto.

Poznámka. Vektory ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ z vektorovém prostoru $\mathbb{P}$ jsou lineárně závislé, jestliže existují taková čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$, z nichž alespoň jedno je různé od 0, že $c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Příklad 2.3. Ukažme, že vektory ${}^1\boldsymbol{x} = (1, 4, -4)$, ${}^2\boldsymbol{x} = (1, 2, 0)$, ${}^3\boldsymbol{x} = (1, 5, -2)$ z prostoru $\mathbb{V}_3$ jsou lineárně nezávislé. Skutečně, ze vztahu

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + c_2 \cdot {}^2\boldsymbol{x} + c_3 \cdot {}^3\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

dostáváme

$$c_1 \cdot (1, 4, -4) + c_2 \cdot (1, 2, 0) + c_3 \cdot (1, 5, -2) = (0, 0, 0),$$

to jest

$$(c_1 + c_2 + c_3, 4c_1 + 2c_2 + 5c_3, -4c_1 + 0c_2 - 2c_3) = (0, 0, 0).$$

Aby rovnost mezi těmito vektory platila, musí koeficienty c_1, c_2, c_3 vyhovovat systému lineárních rovnic

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0, \tag{2.17}$$
$$4c_1 + 2c_2 + 5c_3 = 0, \tag{2.18}$$
$$-4c_1 + 0c_2 - 2c_3 = 0. \tag{2.19}$$

Jak se lehce přesvědčíme, má systém rovnic (2.17)—(2.19) jediné řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jsou tedy dané vektory lineárně nezávislé.

Poznámka. Lineární nezávislost a lineární závislost vektorů se dá vyslovit též takto:

a) Vektor $\mathbf{0}$ je lineárně závislý, neboť $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Vektory ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$, $n > 1$, jsou lineárně závislé, když a jenom když alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních z nich. (Dokažte!)

Příklad 2.4. Vektory

$$(1, 2, 3),\ (-1, 2, 0),\ (1, 6, 6)$$

jsou lineárně závislé. Lehce nahlédneme, že

$$2 \cdot (1, 2, 3) + (-1, 2, 0) = (1, 6, 6).$$

Vektor $(1, 6, 6)$ jsme vyjádřili jako lineární kombinaci zbývajících dvou vektorů.

Zaveďme si nyní pojem hodnosti skupiny $m-$ vektorů.

Definice 2.5. Řekneme, že skupina $m-$vektorů má hodnost h, jestliže maximální počet lineárně nezávislých vektorů v této skupině je h.

Každou matici typu (m, n) lze považovat za skupinu $m-$řádkových vektorů, resp. za skupinu $n-$ sloupcových vektorů. Hodnost skupiny $m-$ řádkových vektorů nazýváme řádkovou hodností matice. Hodnost skupiny $n-$ sloupcových vektorů nazýváme sloupcovou hodností matice.

Příklad 2.5. Určete řádkovou hodnost matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Označme ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}, {}^3\boldsymbol{x}$ postupně první, druhý a třetí řádek matice $\boldsymbol{A}$. Tedy

$$
\begin{aligned}
{}^1\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, && (2.20)\\
{}^2\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, && (2.21)\\
{}^3\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}. && (2.22)
\end{aligned}
$$

Zřejmě vektor ${}^3\boldsymbol{x}$ je lineárně závislý na vektorech ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}$, neboť

$$ {}^3\boldsymbol{x} = {}^1\boldsymbol{x} + {}^2\boldsymbol{x} $$

a vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ jsou lineárně nezávislé. Skutečně, kdyby tyto vektory byly lineárně závislé, byl by jeden z nich násobkem druhého. To znamená, existovalo by takové číslo α, že by ${}^2\boldsymbol{x} = \alpha {}^1\boldsymbol{x}$ to jest, platilo by

$$ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. $$

Takové číslo α však evidentně neexistuje. Vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ jsou tedy lineárně nezávislé. Tedy mezi vektory ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$, ${}^3\boldsymbol{x}$ jsou právě dva lineárně nezávislé vektory. Řádková hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je tedy rovna 2.

Hledání hodnosti matice přímo z definice je zdlouhavé. Proto se daná matice převádí dále popsanými úpravami (transformacemi) na matici, která má stejnou hodnost jako daná matice a jejíž hodnost je zřejmá. V dalším budeme řešit tuto úlohu transformací dané matice na tak zvanou schodovitou matici. Zaveďme si nyní pojem schodovité matice.

Definice 2.6. Matici $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) nazveme schodovitou maticí, jestliže pro každé dva řádkové indexy p, q matice $\boldsymbol{A}$ platí:

- Nechť p–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nenulový a q–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nulový, potom $p < q$.
- Nechť p–tý a q–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ jsou nenulové a nechť a_{p,s_p} je první nenulový prvek matice $\boldsymbol{A}$ v p–tém řádku a a_{q,s_q} je první nenulový prvek v q–tém řádku matice $\boldsymbol{A}$. Jestliže $p < q$, potom je $s_p < s_q$.

Příklad 2.6. Matice$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 9 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 9 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je schododvitá matice.

Úkol. Dokažte si, že horní schodovitá matice má řádkovou hodnost rovnu počtu jejich nenulových řádků.

2.3 Báze vektorového prostoru

Zaveďme si nyní pojem báze. V některých vektorových prostorech existují vektory, které mají tu vlastnost, že každý vektor tohoto prostoru lze vyjádřit jako jejich vhodnou lineární kombinaci. To nás vede k této definici.

Definice 2.7. (Báze vektorového prostoru) Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor. ${}^1\boldsymbol{e}, \ldots, {}^n\boldsymbol{e}$ jsou vektory z $\mathbb{P}$ s těmito vlastnostmi:

Definice báze

1. jsou lineárně nezávislé
2. každý vektor prostoru $\mathbb{P}$ se dá vyjádřit jako jejich lineární kombinace, to jest, ke každému vektoru $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$ existují taková čísla $c_1, \ldots, c_n$, že

$$\boldsymbol{a} = c_1\, {}^1\boldsymbol{e} + \ldots + c_n\, {}^n\boldsymbol{e}.$$

Potom říkáme, že vektory ${}^1\boldsymbol{e}, \ldots, {}^n\boldsymbol{e}$ z $\mathbb{P}$ tvoří jeho bázi.

Příklad 2.7. Dokažte že vektory

$${}^1\boldsymbol{e} = (1, 0, 0),\ {}^2\boldsymbol{e} = (0, 1, 0),\ {}^3\boldsymbol{e} = (0, 0, 1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Důkaz. Dokažme především, že vektory

$${}^1\boldsymbol{e},\ {}^2\boldsymbol{e},\ {}^3\boldsymbol{e}$$

jsou lineárně nezávislé. Abychom to dokázali, hledejme koeficienty c_1, c_2, c_3, pro něž je

$$c_1\, {}^1\boldsymbol{e} + c_2\, {}^2\boldsymbol{e} + c_3\, {}^3\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},$$

to jest, pro něž je

$$c_1 \cdot (1, 0, 0) + c_2 \cdot (0, 1, 0) + c_3 \cdot (0, 0, 1) = \mathbf{(}0, 0, 0).$$

To zřejmě platí když a jenom když $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jsou tedy vektory ${}^1\boldsymbol{e} = (1, 0, 0)$, ${}^2\boldsymbol{e} = (0, 1, 0)$, ${}^3\boldsymbol{e} = (0, 0, 1)$ skutečně lineárně nezávislé.

Nechť nyní $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ je libovolný vektor z $\mathbb{V}_3$ a hledejme koeficienty c_1, c_2, c_3, pro něž je

$$c_1\, {}^1\boldsymbol{e} + c_2\, {}^2\boldsymbol{e} + c_3\, {}^3\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a},$$

to jest, pro něž platí

$$c_1 \cdot (1, 0, 0) + c_2 \cdot (0, 1, 0) + c_3 \cdot (0, 0, 1) = (a_1, a_2, a_3).$$

Odtud dostáváme $c_1 = a_1, c_2 = a_2, c_3 = a_3$. Vektory

$${}^1\boldsymbol{e} = (1, 0, 0), {}^2\boldsymbol{e} = (0, 1, 0), {}^3\boldsymbol{e} = (0, 0, 1)$$

mají vlastnosti uvedené v definici 2.7, takže tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Příklad 2.8. Dokažte, že vektory

$${}^1\boldsymbol{f} = (1, 1, 0),\ {}^2\boldsymbol{f} = (0, 1, 0),\ {}^3\boldsymbol{f} = (1, 1, 1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Budeme postupovat podobně jako v minulém příkladě. Napřed dokážeme, že vektory

$$^1\boldsymbol{f},\ ^2\boldsymbol{f},\ ^3\boldsymbol{f}$$

jsou lineárně nezávislé. Hledejme koeficienty c_1, c_2, c_3, pro něž je

$$c_1\,^1\boldsymbol{f} + c_2\,^2\boldsymbol{f} + c_3\,^3\boldsymbol{f} = \mathbf{0},$$

to jest, pro něž je

$$c_1 \cdot (1,1,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (1,1,1) = (0,0,0).$$

To zřejmě platí když a jenom když

$$\begin{aligned} c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= 0, && (2.23)\\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0, && (2.24)\\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= 0. && (2.25) \end{aligned}$$

Tento systém rovnic má právě jedno řešení a to $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jsou tedy vektory $^1\boldsymbol{f} = (1,1,0),\ ^2\boldsymbol{f} = (0,1,0),\ ^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$ lineárně nezávislé.

Abychom dokázali, že tyto vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$, musíme ještě dokázat, že každý vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}_3$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $^1\boldsymbol{f}$, $^2\boldsymbol{f}$, $^3\boldsymbol{f}$. Nechť tedy $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$. Hledejme nyní koeficienty c_1, c_2, c_3, pro něž je $c_1\,^1\boldsymbol{f} + c_2\,^2\boldsymbol{f} + c_3\,^3\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}$, to jest, že

$$c_1 \cdot (1,1,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (1,1,1) = (a_1, a_2, a_3).$$

To zřejmě platí když a jenom když

$$\begin{aligned} c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= a_1, && (2.26)\\ c_1 + c_2 + c_3 &= a_2, && (2.27)\\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= a_3. && (2.28) \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $c_1 = a_1 - a_3,\ c_2 = a_2 - a_1,\ c_3 = a_3$. Vektory

$$^1\boldsymbol{f} = (1,1,0),\ ^2\boldsymbol{f} = (0,1,0),\ ^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$$

mají vlastnosti uvedené v definici 2.7, takže tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Všimněmě si blíže obou těchto příkladů. V obou příkladech jsme uvažovali tentýž vektorový prostor. Ukázali jsme, že jak vektory

$$^1\boldsymbol{e} = (1,0,0),\ ^2\boldsymbol{e} = (0,1,0),\ ^3\boldsymbol{e} = (0,0,1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$, tak i vektory

$$^1\boldsymbol{f} = (1,1,0),\ ^2\boldsymbol{f} = (0,1,0),\ ^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Báze vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$ není tedy určena jednoznačně. V nahoře uvedeném příkladě byl počet vektorů tvořících bázi téhož vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$ v obou případech stejný. Otázkou je, zda se jedná o nahodilost, anebo zda se jedná o nějakou zákonitost. V případě, že počet vektorů tvořících bázi by byl stejný pro každou bázi, potom tento počet by charakterizoval příslušný vektorový prostor. Uveďme si tedy následující větu, která odpovídá na tuto otázku.

Věta 2.2. *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a ${}^1\boldsymbol{e}, \ldots, {}^n\boldsymbol{e}$ je jeho báze, tvořena n vektory. Potom platí:*

- *Jestliže ${}^1\boldsymbol{f}, \ldots, {}^m\boldsymbol{f}$ je skupina m vektorů z $\mathbb{P}$, kde $m \geq n$, potom v ní je nejvýše n lineárně nezávislých vektorů.*
- *Každá skupina n lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{P}$ je jeho báze.*
- *Číslo n nazýváme dimenzí vektorového prostoru $\mathbb{P}$. Píšeme $dim\mathbb{P} = n$.*

Důkaz: Bez důkazu. □

Dokažte si platnost tohoto tvrzení

Aritmetický vektorový prostor $\mathbb{V}_n$ má dimenzi rovnu n, tj. $dim\mathbb{V}_n = n$. Jedna z jeho bází je tvořena vektory

$$
{}^1\boldsymbol{e} = (1, 0, \ldots, 0),\ {}^2\boldsymbol{e} = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ {}^n\boldsymbol{e} = (0, 0, \ldots, 1).
$$

Uveďme si nyní pojem *vektorového podprostoru* vektorového prostoru $\mathbb{P}$.

V definici (2.2)jsme si uvedli pojem vektorového podprostoru. Uveďme si nyní *pojem vektorového prostoru generovaného systémem vektorů*. Tyto vektory nemusí být lineárně nezávislé.

Definice 2.8. (Lineární obal množiny) Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a nechť $M \subseteq \mathbb{P}$. Potom množinu Q všech lineárních kombinací vektorů z M nazýváme lineárním obalem množiny M. Množina Q s operacemi „+“ a „·“ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{P}$. Říkáme, že prostor $\mathbb{Q}$ je generován množinou M. Jestliže množina M obsahuje jenom lineárně nezávislé vektory, tvoří tyto vektory bázi vektorového prostoru $\mathbb{Q}$.

Příklad 2.9. Nechť Q je množina těch vektorů z $\mathbb{V}_5$, jejichž první a třetí složka je stejná. Potom množina Q s operacemi „+“ a „·“, definovanými v prostoru $\mathbb{V}_5$, je vektorovým podprostorem $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{V}_5$. Vektory

$$
(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \tag{2.29}
$$

tvoří jeho bázi.

Skutečně. Nechť

$$
\boldsymbol{a} = (s, a_2, s, a_4, a_5),\ \boldsymbol{b} = (r, b_2, r, b_4, b_5)
$$

a α, r, s jsou libovolná čísla. Potom

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (s + r, a_2 + b_2, s + r, a_4 + b_4, a_5 + b_5),$$

takže první a třetí složka tohoto součtu je stejná, takže tento součet patří do množiny Q. Podobně

$$\alpha \cdot \boldsymbol{a} = (\alpha \cdot s,\ \alpha \cdot a_2,\ \alpha \cdot s,\ \alpha \cdot a_4,\ \alpha \cdot a_5),$$

takže první a třetí složka tohoto součinu je stejná, takže součin $\alpha \cdot \boldsymbol{a}$ patří do množiny Q. Tato množina Q s operacemi „+“ a „·“, definovanými v $\mathbb{V}_5$, je vektorovým podprostorem $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{V}_5$.

Ukažme ještě, že vektory (2.29) tvoří jeho bázi. Dokažme napřed, že jsou lineárně nezávislé. Skutečně, hledejme taková c_1, c_2, c_3, c_4 pro něž je

$$c_1 \cdot (1, 0, 1, 0, 0) + c_2 \cdot (0, 1, 0, 0, 0) + c_3 \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + c_4 \cdot (0, 0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Odtud dostáváme

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 0).$$

Tento vztah je splněn zřejmě jenom v případě, že

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.$$

Jsou tedy vektory (2.29) lineárně nezávislé.

Nechť nyní

$$\boldsymbol{a} = (s, a_2, s, a_4, a_5)$$

je libovolný vektor z $\mathbb{Q}$. Potom

$$s \cdot (1, 0, 1, 0, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, 0, 0) + a_4 \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + a_5 \cdot (0, 0, 0, 0, 1) = \\ = (s, a_2, s, a_4, a_5)$$

Lze tedy vektor $\boldsymbol{a} = (s, a_2, s, a_4, a_5)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů (2.29). Tím je důkaz proveden.

Zároveň lze konstatovat, že vektorový prostor $\mathbb{Q}$ je generován vektory (2.29).

Vraťme se k systému rovnic (1.34)

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2.30}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n), $\boldsymbol{b}$ je vektor $(m, 1)$ a neznámý vektor $\boldsymbol{x}$ je typu $(n, 1)$.

Označme

$${}^1\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \qquad {}^2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad {}^n\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Potom systém (1.34) lze zapsat jako

$$\boldsymbol{x}_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{x}_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots + \boldsymbol{x}_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

tj.

$$x_1 {}^1\boldsymbol{a} + x_2 {}^2\boldsymbol{a} + \cdots + x_n {}^n\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}. \tag{2.31}$$

Příklad 2.10. Systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_1 - 3x_3 &= -12 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

lze zapsat jako

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Poznámka. Pro každou uspořádanou n-tici reálných čísel je levá strana (2.31), tj. vektor

$$x_1 {}^1\boldsymbol{a} + x_2 {}^2\boldsymbol{a} + \cdots + x_n {}^n\boldsymbol{a}$$

vektorem z vektorového prostoru G generovaného sloupcovými vektory matice $\boldsymbol{A}$, tj. vektory ${}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, \ldots, {}^n\boldsymbol{a}$. Systém rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má řešení když a jenom když $\boldsymbol{b} \in G$.

Elementární transformace

Zavedení pojmu elementární transformace

Definice 2.9. (Základní elementární transformace) Nechť ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}$ jsou řádkové vektory z prostoru $\mathbb{V}_n$. Nechť $\boldsymbol{X}$ je matice typu (m, n). Označme ${}^k\boldsymbol{x}$, $k = 1, 2, \cdots, m$, její $k-$tý řádek. Dále budeme definovat několik zobrazení (transformací), kterým se k matici $\boldsymbol{X}$ přiřadí matice $\boldsymbol{Y}$, typu (m, n), jejíž řádky jsou rovněž z prostoru $\mathbb{V}_n$. Její $i-$tý řádek označme ${}^i\boldsymbol{y}$, $i = 1, 2, \cdots, m$. Uveďme si tyto transformace, které mají význam např. při řešení těchto úloh

- Hledání hodnosti matice
- Hledání hodnoty determinantu
- Řešení systému lineárních algebraických rovnic

Transformace $\mathcal{H}1(i,\alpha)$. Transformací

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X}, \quad \text{což lze zapsat též jako} \quad \boldsymbol{X} \rightarrow_{ri=\alpha.ri} \boldsymbol{Y}. \tag{2.32}$$

se k matici $\boldsymbol{X}$ přiřadí matice $\boldsymbol{Y}$ typu (m,n), jejíž řádky ${}^k\boldsymbol{y}$, $k = 1, 2, \cdots, m$ jsou :

$${}^i\boldsymbol{y} := \alpha \cdot {}^i\boldsymbol{x}, \quad \text{a} \quad {}^k\boldsymbol{y} = {}^k\boldsymbol{x} \quad \text{pro} \quad k \neq i. \tag{2.33}$$

(To znamená, že řádek ${}^i\boldsymbol{x}$ násobíme číslem α a ostatní řádky ponecháme bez změny.)

Příklad 2.11. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Z matice $\boldsymbol{A}$ utvořme nyní matici $\boldsymbol{B}$ typu $(3,4)$, jejíž druhý řádek je roven druhému řádku matice $\boldsymbol{A}$ násobenému číslem (-3) a ostatní řádky matice $\boldsymbol{B}$ jsou rovny odpovídajícím řádkům matice $\boldsymbol{A}$. Takto vzniklá matice je matice

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -15 & -18 & -21 & -24 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ transformací $\mathcal{H}1(2,-3)$. Budeme psát

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{H}1(2,-3)\boldsymbol{A}, \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{A} \rightarrow_{r2=-3.r2} \boldsymbol{B}.$$

Transformace $\mathcal{H}2(i,j)$ Transformací

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}, \quad \text{což lze zapsat též jako} \quad \boldsymbol{X} \rightarrow_{rj=ri+rj} \boldsymbol{Y}, \tag{2.35}$$

se k matici $\boldsymbol{X}$ typu (m,n) přiřadí matice $\boldsymbol{Y}$ téhož typu (m,n), pro jejíž řádky ${}^k\boldsymbol{y}$, $k = 1, 2, \cdots, m$ je

$${}^j\boldsymbol{y} = {}^j\boldsymbol{x} + {}^i\boldsymbol{x} \quad \text{a pro } k \neq j \ je \ {}^k\boldsymbol{y} = {}^k\boldsymbol{x}. \tag{2.36}$$

(To znamená, že k j–tému řádku ${}^j\boldsymbol{x}$ se přičte i–tý řádek ${}^i\boldsymbol{x}$ a ostatní řádky se ponechají bez změny.)

Příklad 2.12. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

Utvořme nyní matici $\boldsymbol{C}$ typu $(3,4)$ tak, že její třetí řádek je roven součtu prvního a třetího řádku matice $\boldsymbol{A}$ a ostatní řádky matice $\boldsymbol{C}$ jsou rovny odpovídajícím řádkům matice $\boldsymbol{A}$. Píšeme

$$\boldsymbol{C} = \mathcal{H}2(1,3)\boldsymbol{A}, \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{A} \rightarrow_{r3=r3+r1} \boldsymbol{C}$$

Dostáváme

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

Postupným aplikováním těchto základních elementárních transformací $\mathcal{H}1(i,\alpha)$, $\mathcal{H}2(i,j)$ dostáváme tak zvané odvozené elementární transformace. Ukažme si následující příklad.

Vraťme se opět k matici (2.34) a vytvořme z ní matici elementární transformaci postupným aplikováním transformací $\mathcal{H}2(1,2)$, $\mathcal{H}1(2,-3)$. Nechť tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Označme $\boldsymbol{F} = \mathcal{H}2(1,2)\boldsymbol{A}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Na takto vzniklou matici $\boldsymbol{F}$ aplikujme transformaci $\mathcal{H}1(2,-3)$. Položme $\boldsymbol{G} = \mathcal{H}1(2,-3)\boldsymbol{F}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -18 & -24 & -30 & -36 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Matice $\boldsymbol{G}$ vznikla postupným aplikováním transformací $\mathcal{H}2(1,2)$, $\mathcal{H}1(2,-3)$. (Jde o složené zobrazení).

Některé významné odvozené elementární transformace

Transformace $\mathcal{H}3(i,j)$. Transformací

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}3(i,j)\boldsymbol{X}, \quad i \neq j, \quad \text{což lze zapsat též jako} \quad \boldsymbol{X} \rightarrow_{ri=-rj,rj=ri} \boldsymbol{Y} \tag{2.38}$$

se k matici $\boldsymbol{X}$ přiřadí matice $\boldsymbol{Y}$, jejíž řádky ${}^{k}\boldsymbol{y}$, $k = 1,2,\cdots,m$, jsou

$${}^{i}\boldsymbol{y} := {}^{j}\boldsymbol{x},\ {}^{j}\boldsymbol{y} := -{}^{i}\boldsymbol{x},\ {}^{k}\boldsymbol{y} := {}^{k}\boldsymbol{x} \quad \text{pro} \quad k \neq i,j. \tag{2.39}$$

(To znamená, že matice $\boldsymbol{Y}$ vznikne z matice $\boldsymbol{X}$ vynásobením i–tého řádku číslem (-1) a následnou výměnou i–tého a j–tého řádku.)

Příklad 2.13. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte matici $\boldsymbol{B} = \mathcal{H}3(1,3)\boldsymbol{A}$,

Řešení Matici $\boldsymbol{B}$ obdržíme z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její první řádek násobíme (-1) a pak následně vzájemně vyměníme první a třetí řádek. Obdržíme

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Transformace $\widetilde{\mathcal{H}}3(i,j)$. Transformací

$$\boldsymbol{Y} = \widetilde{\mathcal{H}}3(i,j)\boldsymbol{X}, \quad i \neq j, \text{což lze psát též jako} \boldsymbol{X} \rightarrow_{ri=rj,rj=ri} \boldsymbol{Y} \tag{2.40}$$

se k matici $\boldsymbol{X}$ přiřadí matice $\boldsymbol{Y}$, jejíž řádky ${}^k\boldsymbol{y}$, $k = 1, 2, \cdots, m$ jsou

$${}^i\boldsymbol{y} := {}^j\boldsymbol{x},\ {}^j\boldsymbol{y} := {}^i\boldsymbol{x},\ {}^k\boldsymbol{y} := {}^k\boldsymbol{x} \quad \text{pro} \quad k \neq i, j. \tag{2.41}$$

(To znamená, že skupina vektorů $\boldsymbol{Y}$ vznikne ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ výměnou i–tého a j–tého vektoru.)

Transformace $\mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)$, $i \neq j$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Transformací

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)\boldsymbol{X}, \quad i \neq j, \quad \beta \neq 0, \text{ což lze psát jako } \boldsymbol{X} \rightarrow_{rj=\beta\cdot rj+\alpha\cdot ri} Y, \tag{2.42}$$

se k matici $\boldsymbol{X}$ přiřadí matice $\boldsymbol{Y}$, jejíž řádky ${}^k\boldsymbol{y}$, $k = 1, 2, \cdots, m$, jsou

$${}^j\boldsymbol{y} := \alpha\,{}^i\boldsymbol{x} + \beta\,{}^j\boldsymbol{x}, \quad \text{a} \quad {}^k\boldsymbol{y} = {}^k\boldsymbol{x}, \quad k \neq j.$$

(To znamená, že matice $\boldsymbol{Y}$ vznikne ze z maatice $\boldsymbol{X}$ tak, že k β–násobku j–tého řádku se připočte α–násobek i–tého vektoru a řádek řádky se ponechají bez změny.)

Příklad 2.14. Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Určete transformaci matice $\boldsymbol{A}$ na matici $\boldsymbol{B}$, která má prvek $b_{3,1}$ roven 0. K eliminaci použijte druhý řádek matice $\boldsymbol{A}$.

Řešení Je zřejmé, že stačí třetí řádek matice $\boldsymbol{A}$ nahradíme součtem druhého řádku násobeného číslem (-9) a třetího řádku násobeného číslem 5. Tedy

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{H}4(2, -9, 3, 5), \text{ neboli } \boldsymbol{A} \rightarrow_{r3=5\cdot r3-9\cdot r2} \boldsymbol{B}.$$

Dostáváme

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Věta 2.3. *Nechť* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *jsou matice typu* (m, n). *Nechť matice* $\boldsymbol{Y}$ *vznikla z matice* $\boldsymbol{X}$ *postupnými elementárními transformacemi. Potom matice* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ *mají stejnou řádkovou hodnost.*

Důkaz Detailní důkaz nebudeme uvádět. Lze ukázat, že matice $\boldsymbol{Y}$, která vznikne základními elementárními transformacemi z matce $\boldsymbol{X}$ má stejnou hodnost jako matice $\boldsymbol{X}$. Dále se dokáže, že dále uvedené odvozené elementární transformace vzniknou složením základních elementárních transformací.

Uvedli jsme si, že matice $\boldsymbol{Y}$, která vznikne z matice $\boldsymbol{X}$ elementárními transformacemi, má stejnou hodnost jako matice $\boldsymbol{X}$. Popišme tedy výpočtový postup jak elementárními transformacemi transformovat danou matici $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$ na schodovitou matici.

Transformace matice X na schodovitou matici

Nechť $\boldsymbol{X}$ je nenulová matice typu (m, n), která není ve schodovitém tvaru. Budeme ji postupně transformovat, při každé transformatici budeme značit opět $\boldsymbol{X}$.

Postup výpočtu

$$\boxed{i := 1}$$

B1. Budeme vytvářet i-tý řádek hledané schodovité matice.

B2. K číslu i určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice $\boldsymbol{X}$, v jehož řádcích $i, i+1, \ldots, m$ je alespoň jeden nenulový prvek. Toto pořadové číslo sloupce označme s_i.

B3. Zvolme $p \in \{i, \ldots, m\}$, pro než je $x_{p,s_i} \neq 0$. (je-li takových p více, zvolíme jedno z nich). Takto zvolený p-tý řádek matice $\boldsymbol{X}$ nazveme *hlavním řádkem*.

B4. Je-li $p \neq i$, vyměníme navzájem p-tý a i-tý řádek metice $\boldsymbol{X}$. Po této výměně je i-tý řádek hlavním řádkem. Je-li $p = i$, je již i-tý řádek hlavním řádkem.

B5. Provedeme nyní takové elementární transformace, aby po jejich realizaci byly prvky $x_{i+1,s_i}, \ldots, x_{m,s_i}$ rovny 0. Toho dosáhneme např. elementárními transformacemi

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(i, -x_{j,s_i}, j, x_{i,s_i})\boldsymbol{X} \tag{2.43}$$

pro ty indexy $j = i+1, \ldots, m$ pro něž $x_{j,s_j} \neq 0$.

B6. Jestliže matice $\boldsymbol{X}$ není ještě ve schodovitém tvaru, položme

$$\boxed{i := i+1}$$

a přejdeme zpět na **B1**.

Je-li $\boldsymbol{X}$ ve schodovitém tvaru, je transformace ukončena. Hodnost dané matice je pak rovna počtu nenulových řádků schodovité matice.

Příklad 2.15. Určete řádkovou hodnost matice

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

užitím její transformace na schodovitou matici.

Řešení. Položme

$$\boldsymbol{X} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad m := 4, \quad n := 5.$$

V popisu postupu výpočtu budeme **B1-*i*,. . . ,B6-*i*** znamenat úkony **B1–B6** pro dané i.

Začátek

$$\boxed{i := 1}$$

B1-1 Budeme vytvářet i-tý (první) řádek hledané schodovité matice.

B2-1 K číslu i (to jest k číslu $i = 1$) určíme nejmenší pořadové číslo sloupce, v jehož řádcích $i, \ldots, m$ (to jest v jehož řádcích $1, 2, 3, 4$) je nenulový prvek. Je to druhý sloupec. Položíme tedy $s_i := 2$ ($s_1 = 2$).

B3-1 Zvolíme hlavní řádek. V s_i–tém sloupci (to jest ve 2. sloupci) jsou nenulové prvky v řádcích $1, 2, 4$. Z nich zvolíme jeden. Jeho pořadové číslo označíme p. Rozhodneme se pro řádek $p = 1$, který zvolíme jako hlavní.

B4-1 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p–tý řádek, kde $p = i$, neprovádíme výměnu řádku p s řádkem i.

B5-1 Provedeme nyní takové elementární tranformace matice $\boldsymbol{X}$, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (to jest ve druhém sloupci) v řádcích $i{+}1, \ldots, m$ (to jest v řádcích 2, 3, 4) nulové prvky. (Prvky $x_{2,2}, x_{3,2}, x_{4,2}$ eliminujeme). Toho dosáhneme např. elementárními transformacemi

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(i, -x_{j,s_i}, j, x_{i,s_i})\boldsymbol{X}, \quad \text{pro } j = i+1, \ldots, m, \text{ je-li } x_{j,s_j} \neq 0.$$

Poněvadž $i = 1$, $s_i = 2$, $m = 4$, eliminaci provedeme elementárními transformacemi

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(1, -x_{j,2}, j, x_{1,2})\boldsymbol{X}, \qquad \text{pro } j = 2, 3, 4.$$

To znamená, že prvek $x_{j,2}$ pro každé $j \in \{2, 3, 4\}$ eliminujeme tak, že hlavní řádek (to jest první řádek) vynásobíme číslem $(-x_{j,2})$ a přičteme jej k j-tému řádku vynásobeného číslem $x_{1,2}$.

- Položme $j := i + 1$ (tedy pro $j = 2$) dostáváme

  $$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(1, -a_{2,2}, 2, a_{1,2})\boldsymbol{X}.$$

  Po této transformaci je druhý řádek matice $\boldsymbol{X}$ roven

  $$\boldsymbol{X}(2, :) = -2 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 3) + 1 \cdot (0\ 2\ 6\ 4\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0\ \ -5)$$

  a ostatní řádky matice $\boldsymbol{X}$ se nemění.
- Položme $j := j + 1$. Je tedy $j = 3$. Poněvadž $x_{j,s_i} = 0$, (to jest $x_{3,2} = 0$), eliminaci není třeba provádět a přejdeme k dalšímu řádku.
- Položme $j := j + 1$. Je tedy $j = 4$. Poněvadž $x_{j,s_i} = 1 \neq 0$, (to jest $x_{4,2} \neq 0$,) provedeme elementární transformaci

  $$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(1, -a_{4,2}, 4, a_{1,2})\boldsymbol{X}.$$

  Po této transformaci je čtvrtý řádek matice $\boldsymbol{X}$ roven

  $$\boldsymbol{X}(4, :) = -1 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 3) + 1 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 4) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1).$$

  Ostatní řádky matice $\boldsymbol{X}$ se nemění.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B6-1 Poněvadž obdržená matice $\boldsymbol{X}$ ještě není horní schodovitou maticí, položíme

$$\boxed{i := i + 1}$$

a přejdeme na bod **B1**.

B1-2 *Je tedy $i = 2$. Budeme vytvářet druhý řádek horní schodovité matice.*

B2-2 K číslu i (to jest k číslu $i = 2$) určíme nejmenší pořadové číslo s_i (to jest s_2) sloupce, v jehož řádcích $i, \ldots, m$ (to jest v jehož řádcích $2, 3, 4$) je nenulový prvek. Je to čtvrtý sloupec. Položíme tedy $s_i := 4$ ($s_2 = 4$).

B3-2 Zvolíme hlavní řádek. V s_i-tém sloupci (to jest ve 4. sloupci) je v řádcích $2, 3, 4$ nenulový prvek jen v řádku 3. Jeho pořadové číslo označíme p. Tento řádek zvolíme za hlavní řádek. Je tedy $p := 3$.

B4-2 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek řádek p, kde $p \neq i$, provedeme v matici $\boldsymbol{X}$ výměnu řádku p s řádkem i. (Tedy výměnu druhého a třetího řádku.) Dostáváme tak matici

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B5-2 Provedeme nyní takové elementární transformace matice $\boldsymbol{X}$, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (to jest ve čtvrtém sloupci) v řádcích $i+1, \ldots, m$ (to jest v řádcích 3, 4) nulové prvky. (Prvky $x_{3,4}, x_{4,4}$ eliminujeme.) Avšak v tomto případě jsou prvky $x_{3,4}, x_{4,4}$ rovny 0, takže eliminaci není třeba provádět. Je tedy výsledná matice v tomto kroku

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B6-2 Obdržená matice $\boldsymbol{X}$ ještě není horní schodovitou maticí, proto položíme

$$\boxed{i := i + 1}$$

a přejdeme na bod **B1**.

B1-3 Je tedy $i = 3$. To znamené, že budeme vytvářet třetí řádek hledané schodovité matice.

B2-3 K číslu i (to jest k číslu $i = 3$) určíme nejmenší pořadové číslo s_i (to jest s_3), v jehož řádcích $i, \ldots, m$ (to jest v jehož řádcích $3, 4$) je nenulový prvek. Je to pátý sloupec. Položme tedy $s_i := 5$ ($s_3 = 5$).

B3-3 Zvolíme hlavní řádek. V s_i-tém sloupci (to jest v 5. sloupci) jsou nenulové prvky v řádcích 3, 4. Z nich zvolíme jeden. Jeho pořadové číslo označíme p. Rozhodneme se pro řádek $p = 4$, který zvolíme jako hlavní.

B4-3 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p-tý řádek, kde $p \neq i$, provádíme výměnu řádku p s řádkem i. Po této výměně je

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

B5-3 Provedeme nyní takové elementární transformace matice $\boldsymbol{X}$, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (to jest v pátém sloupci) v řádcích $i+1, \ldots, m$ (to jest v řádku 4) nulové prvky. (Prvek $x_{4,5}$ eliminujeme.) Toho lze dosáhnout např. elementární transformací

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}4(3, -x_{4,5}, 4, x_{3,5})\boldsymbol{X}.$$

Výpočtem dostáváme

$$\boldsymbol{X}(4,:) = 5 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 1) + 1 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ \ -5) = (0\ 0\ 0\ 0\ 0).$$

Je tedy

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B6-3 Poněvadž obdržená matice je již horní schodovitou maticí, je transformace dané matice na horní schodovitou matici již ukončen.

Poněvadž obdržená schodovitá matice má celkem tři nenulové řádky, je její hodnost a tedy i hodnost zadané matice rovna 3. Tedy $h(\boldsymbol{X}) = 3$.

Příklad 2.16. Určete hodnost skupiny vektorů

$${}^1\boldsymbol{a} = (1\ 0\ \ -1\ 2), \qquad {}^2\boldsymbol{a} = (0\ 1\ 2\ \ -1), \qquad {}^3\boldsymbol{a} = (0\ 1\ 3\ \ -6).$$

Řešení. Úloha je ekvivalentní s úlohou nalezení řádkové hodnosti matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Tuto hodnost hledejme transformací matice $\boldsymbol{A}$ na horní schodovitou matici dříve popsaným postupem.

Položme

$$\boxed{i := 1}$$

B1-1 Budeme vytvářet i-tý řádek (1. řádek) schodovité matice.

B2-1 K číslu $i = 1$ určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice $\boldsymbol{A}$, v jehož řádcích 1, 2, 3 je alespoň jeden prvek různý od 0. Je to v prvním sloupci. Pokládáme tedy $s_1 := 1$.

B3-1 Hledáme nyní řádek matice $\boldsymbol{A}$, v jehož sloupci s pořadovým číslem $s_1 = 1$ je nenulový prvek. To jest, hledáme $p \in \{1, 2, 3\}$, pro něž je $a_{p,s_1} \neq 0$. Je to pro $p = 1$. Položme tedy $p := 1$. Řádek $p = 1$ volíme za hlavní.

B4-1 Poněvadž $p = i$, neprovádíme výměnu p-tého a i-tého řádku. První řádek je hlavním.

B5-1 Poněvadž všechny prvky v prvním sloupci počínaje druhým řádkem, jsou nulové (tj. prvky $a_{j,1} = 0$ pro $j = 2, 3$), přejdeme k **B6-1**.

B6-1 Matice $\boldsymbol{A}$ není horní schodovitou maticí, proto položíme

$$\boxed{i := i + 1}$$

a jdeme zpět k bodu **B1**.

B1-2 Je tedy $i = 2$. Budeme vytvářet 2. řádek schodovité matice.

B2-2 K číslu i (tj. k číslu $i = 2$) určíme nejmenší pořadové číslo sloupce s_i (to jest s_2), v jehož řádcích 2, 3 je nenulový prvek. Je to druhý sloupec. Položíme tedy $s_2 := 2$.

B3-2 Zvolíme hlavní řádek. Ve sloupci s pořadovým číslem s_2 (tj. ve druhém sloupci) hledáme index j, $j \geq i$, tak, aby $a_{j,s_2} \neq 0$. Je to pro $j = 2$ a pro $j = 3$. Zvolme jedno z nich. Rozhodneme se pro $j = 2$. Položíme $p := 2$. Bude tedy p-tý řádek hlavním řádkem.

B4-2 Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p-tý řádek, kde $p = i$, neprovádíme vzájemnou výměnu p-tého a i-tého řádku. Je tedy i-tý řádek hlavním řádkem.

B5-2 Provedeme nyní takové elementární transformace, aby po jejich realizaci byly v s_i-tém sloupci (ve druhém sloupci) v řádcích $i + 1, \ldots, m$ (to jest v řádku 3) nulové prvky. Toho dosáhneme např. elementární transformací

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(2, -a_{3,2}, 3, a_{2,2})\boldsymbol{A}.$$

Výpočtem dostáváme

$$\boldsymbol{A}(3,:) = -1(0\ 1\ 2\ \ -1) + 1(0\ 1\ 3\ \ -6) = (0\ 0\ 1\ \ -5).$$

Celkem dostáváme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

B6-2 Dosažená matice $\boldsymbol{A}$ je horní schodovitá matice. Poněvadž má tři nenulové řádky, je její hodnost rovna 3, je tedy $h(\boldsymbol{A}) = 3$.

Dané vektory ${}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, {}^3\boldsymbol{a}$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad 2.17. Určete hodnost matice

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení. V tomto příkladě naznačíme pouze výsledky jednotlivých úprav bez komentáře.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Má tedy matice $\boldsymbol{X}$ hodnost 2.

Literatura

[1] Jan Coufal, Jindřich Klůfa, Miloš Kaňka, Jiří Henzler: *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty*. ISBN 80-7187-1484

[2] Prof. RNDr. Miloslav Fiedler, DrSc: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1981

[3] František Šik: *Lineární algebra zaměřena na numerickou analýzu*. Vydala MU Brno, 1998, ISBN 80–210–1966

[4] RNDr. Jiří Kopáček, CSc: *Matematika pro fyziky II*. (skriptum), UK Praha

[5] Josef Polák: *Přehled středoškolské matematiky*. ISBN 80-85849-78-X