

Definice kvadratické formy

Fce. $k(x)$ reálných proměnných x_1, x_2, \dots, x_n daná předpisem $k(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$, kde a_{ij}

je prvek čtvercové symetrické matice $A = \{a_{ij}\}$ řádu n , se nazývá kvadratická forma příslušná matici A . Matice A se nazývá matice kvadratické formy k .

Maticový zápis kvadratické formy: $k(x) = x' \cdot A \cdot x$, kde $x' [1 \times n]$, $A [n \times n]$, $x [n \times 1]$.

Příklad: Určíme předpis kvadratické formy k dané čtvercovou symetrickou maticí třetího řádu

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}. \quad \text{\textit{Řešení}} \text{ získáme z definice: } k(x) = \begin{array}{l} 9x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + \\ 2x_2x_1 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + \\ 3x_3x_1 + 6x_3x_2 + 8x_3^2 \end{array}$$

tedy po úpravě $k(x) = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 8x_3^2$.

Příklad: Určíme matici kvadratické formy k tří proměnných dané předpisem

$$k(x) = 7x_1^2 + 4x_1x_2 + 18x_1x_3 + 6x_2^2 + 3x_3^2.$$

Řešení: Postupujeme obráceně než při řešení předchozího příkladu, přičemž máme na paměti, že matice kvadratické formy k je symetrická.

$$k(x) = \begin{array}{l} 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 9x_1x_3 + \\ 2x_2x_1 + 6x_2^2 + 0x_2x_3 + \\ 9x_3x_1 + 0x_3x_2 + 3x_3^2 \end{array} \quad \text{tedy} \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Klasifikace kvadratické formy

Kvadratická forma $k(x)$ příslušná matici A se nazývá:

- POZITIVNĚ DEFINITNÍ, jestliže platí $k(x) = x' \cdot A \cdot x > 0$ pro libovolný (ne však identicky nulový) vektor x .
- Pozitivně semidefinitní, jestliže platí $k(x) = x' \cdot A \cdot x \geq 0$
- NEGATIVNĚ DEFINITNÍ, jestliže platí $k(x) = x' \cdot A \cdot x < 0$
- Negativně semidefinitní, jestliže platí $k(x) = x' \cdot A \cdot x \leq 0$
- INDEFINITNÍ, jestliže existují dva různé vektory x, y , pro které platí $k(x) = x' \cdot A \cdot x > 0$ a $k(y) = y' \cdot A \cdot y < 0$

Určení typu kvadratické formy

Kvadratická forma $k(x)$ příslušná matici A se nazývá:

- (a) POZITIVNĚ DEFINITNÍ, jestliže jsou všechna vlastní čísla λ matice A kladná, tedy jestliže platí $\lambda > 0$.
- (b) Pozitivně semidefinitní, jestliže pro všechna vlastní čísla platí $\lambda \geq 0$
- (c) NEGATIVNĚ DEFINITNÍ, jestliže pro všechna vlastní čísla platí $\lambda < 0$
- (d) Negativně semidefinitní, jestliže pro všechna vlastní čísla platí $\lambda \leq 0$
- (e) INDEFINITNÍ, jestliže existují vlastní čísla $\lambda \geq 0$ a současně $\lambda < 0$

Sylvestrova věta: Nechť k je kvadratická forma daná čtvercovou symetrickou maticí $A = \{a_{ij}\}$ řádu n . Označme pro $i = 1, \dots, n$

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}.$$

Pak platí:

- (a) Kvadratická forma k (matice A) je pozitivně definitní tehdy a jen tehdy když $D_i > 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.
- (b) Kvadratická forma k (matice A) je negativně definitní tehdy a jen tehdy když $D_i > 0$ pro všechna sudá i a $D_i < 0$ pro všechna lichá i .
- (c) Jestliže existuje sudé i takové, že $D_i < 0$, nebo lichá i, j taková, že $D_i > 0$ a $D_j < 0$, pak kvadratická forma k (matice A) je indefinitní.

Poznámka: Semidefinitní kvadratické formy s použitím Sylvestrovy věty určit nelze.