4 - Modely makroekonomického růstu

Záměrem tohoto oddílu je popsat několik - z pohledu současné ekonomické vědy klasických - makroekonomických modelů, jejichž hlavním smyslem ve své době bylo vystihnout vlivy působení základních makroekonomických proměnných na podstatné tendence vývoje národních ekonomik (s akcentováním zvláště ekonomického růstu), a s pomocí adekvátního matematického aparátu se pokusit vysvětlit procesy probíhající v reálném makroekonomickém prostředí .

Většina modelů, které budou v tomto oddílu zmíněny, má dynamický charakter. Znamená to, že tyto modely připouštějí možnost dopadů vzájemného ovlivňování některých makroveličin (obvykle jednosměrným způsobem) projevujících se nikoliv okamžitě, ale s určitými časovými odstupy. Modely tohoto typu proto obsahují časová zpoždění, jejichž délka vyplývá z poznatků podkladové ekonomické teorie (zpožděná reakce spotřeby domácností na aktuální úroveň příjmu ale naopak také možnost chování spotřebitelů podle očekávaných budoucích příjmů) nebo jsou tato zpoždění vyvozena z určité racionální hypotézy, kterou do modelu vložil jeho tvůrce. Stanovení skutečné délky tohoto zpoždění (nebo odhadu této délky) je následně záležitostí statistického testování založeného na konkrétních makroekonomických datech. V tomto směru hraje ústřední úlohu dnes již velmi bohatý rejstřík speciálních metod vyvíjených (již více než půlstoletí) v ekonometrii.

V matematické formě zápisu modelu se dynamizace projevuje tím, že některé z uvažovaných makroveličin se v modelu vyskytují se zpožděnými hodnotami, tj. ta-která zpožděná veličina má časové přiřazení k některému předchozímu období. Není přitom rozhodující, zda se v zápise modelu objeví (při zpoždění mezi vysvětlovanou proměnnou Y a o jedno období zpožděnou vysvětlující proměnnou X) vztah $Y(t+1) = X(t)$ nebo $Y(t) = X(t-1)$.

Některé modely, s nimiž se seznámíme, jsou formulovány v diskrétním čase, jako bychom vybírali pouze hodnoty proměnných v určitých pevných okamžicích (zpravidla vzatých ve stejných odstupech od sebe), jiné budeme naopak uvažovat ve spojitém čase, kdy lze zvolit kterýkoliv okamžik v rámci uvažovaného období jako vhodný pro reprezentaci popisovaných ekonomických vztahů. Diskrétní případ vede k rovnicím diferenčního typu, druhý (spojitý případ) zpravidla znamená vyjádření trajektorie popisované ekonomické makroproměnné (nejčastěji ekonomického růstu) diferenciální rovnicí (prvního řádu nebo i vyšších řádů). Existují i smíšené modely (diferenciálně-diferenčního typu), s těmi se však v tomto úvodním pojednání seznamovat nebudeme.

V zápise diskrétního modelu použijeme k označení času symbol časové proměnné „t“ jako index u makroproměnné vpravo dole (např. „C_t “, půjde-li o spotřebu), při spojitém vyjádření pak zapíšeme časovou proměnnou v závorce „(t)“ za příslušnou makroproměnnou - pro spotřebu domácností tedy „C(t)“. Výklad nicméně uvedeme nejjednodušším - statickým - modelem, v němž se bez časové proměnné obejdeme. Vystačíme přitom s těmito základními makroveličinami : Y - produkce/důchod (např. hrubý národní či domácí produkt), I - investice podniků (o jejich případném členění až níže), C - spotřeba obyvatelstva a A - buď pouze autonomní investice, popř. autonomní výdaje vůbec (tedy včetně spotřebních výdajů). Autonomní vysvětlující veličinou budeme rozumět tu, která nezávisí na úrovni důchodu (tj. na velikosti závisle proměnné) a je tedy v podstatě nezávislá na stádiu (expanze či deprese), ve kterém se ekonomický systém právě nachází.

4.1 Jednoduchý statický multiplikátor

Vyjděme z nejjednoduššího možného rozdělení produkce (z hlediska poptávky, resp. užití) na spotřebu a investice, tj.

(4.1) $$\mathbf{Y = C + I}\ ,$$

v němž uvažujeme, že spotřeba je popsána spotřební funkcí s jediným argumentem Y tj. C = C(Y) s tím, že na straně investic připustíme pouze autonomní investice (tj. tu část investic, která je nezávislá na velikosti produkce), tedy I = A. U vytvořené produkce předpokládáme její následné úplné užití, provedeme tedy ztotožnění velikosti produkce (jako nabídkové složky) s důchodem (který tvoří poptávkovou složku). Pokud toto ztotožnění odpovídá skutečnému stavu ekonomického systému, lze mluvit o tom, že se (přinejmenším v tomto hlavním směru) ekonomický systém nachází v rovnováze.

Vztah **(4.1)** tedy přejde v

(4.2) $$\mathbf{Y - C(Y) = A}\ ,$$

který podrobíme diferencování podle A, neboť budeme vyšetřovat účinek malé konečné změny (např. růstu) veličiny autonomních investic A na produkci C. Dostaneme relaci

(4.3) $$\frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dA}} - \frac{\mathbf{dC}}{\mathbf{dY}} \cdot \frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dA}} = 1 \quad \text{neboli po úpravě} \quad \frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dA}} = \frac{1}{1-\mathbf{c}} = \frac{1}{\mathbf{s}}$$

Zde jsme označili symbolem **c** výraz **dC/dY** tzv. **mezní sklon ke spotřebě** a symbolem **s** analogicky doplňkovou veličinu do 1 tj. **mezní sklon k úsporám**. Jak známo, platí c + s = 1. Obě veličiny c, s jsou nezáporné (a zpravidla kladné), takže pro jejich hodnoty platí omezení $0 < c < 1$, $0 < s < 1$.

Nahradíme-li diferenciály konečnými (malými) přírůstky, dojde k modifikaci předchozího vztahu na výraz

(4.4) $$\Delta \mathbf{Y} = \frac{\Delta \mathbf{A}}{1-\mathbf{c}} = \frac{\Delta \mathbf{A}}{\mathbf{s}}\ ,$$

což je obecné vyjádření statického multiplikátoru. Výraz (4.4) můžeme slovy charakterizovat takto :

Zvýší-li se hodnota autonomních investic o určitou (malou) hodnotu ΔA, zvýší se rovnovážný důchod o součin ΔA a čísla 1/(1-c), které je větší než 1. Konstanta c je právě mezním sklonem ke spotřebě. Z uvedeného vztahu je patrné, že (pouhé) zvýšení hodnoty autonomních investic může vést (při takto zjednodušeném modelovém pojetí) k přírůstku produkce, tedy, že investice (byť jen autonomní) působí s kladným směrem vlivu na ekonomický růst. Dále lze dovodit, že při zápisu této konstanty jako 1/s bude přírůstek důchodu (při stejném ΔA) tím větší, čím bude hodnota s menší. To ovšem platí jen pro přiměřený rozsah úrovně spoření a neznamená to, že by hlavním cílem bylo minimalizovat úspory obyvatelstva (ve prospěch maximalizace spotřeby) za jakoukoliv cenu.

Konkretizujme dále tvary makroekonomických vztahů **(4.2)** tím, že **předpokládáme jejich linearitu.** U spotřební funkce tedy uvažujme vztah

(4.5) **C = d + cY**, což pro funkci úspor znamená podobu **S = (1 - c) Y - d = - d + sY.**

Kromě mezního sklonu ke spotřebě **c** vystupuje zde ve spotřební funkci konstanta **d**, která označuje tu část spotřeby, která není přímo ovlivněna důchodem. Nazvěme ji proto autonomní spotřebou. U funkce

úspor se tato konstanta projeví zápornou hodnotou, což může mít důsledek v tom, že při nízké úrovni produkce mohou být úspory záporné. (konstanty **c** a **d** předpokládáme kladné).
Ekonomická realita tuto situaci připouští např. v krizových či krátce pokrizových (ne nutně jen v poválečných) obdobích, kdy obyvatelstvo realizuje svou nezbytnou spotřebu výběrem úspor (má-li je k dispozici), neboť (nízká) úroveň příjmů neumožňuje (přinejmenším ne většině obyvatelstva) ukládat peněžní prostředky do úspor. Takováto situace je zpravidla víceméně dočasná.

Podmínku ekonomické rovnováhy nyní obdržíme ve tvaru

(4.6) $$\mathbf{Y - (d + cY) = A} \quad ,$$

tj. pro úroveň rovnovážného důchodu Y dostaneme

(4.7) $$. \; \mathbf{Y = \frac{A + d}{1 - c} = \frac{A + d}{s}}$$

Zápis **(4.7)** takto vyjadřuje výraz pro **lineární statický multiplikátor,** ve kterém na rozdíl od obecného vyjádření multiplikátoru **(4.4)** vystupuje vedle autonomních investic A též autonomní spotřeba d. Vyplývá z něj dále, že rovnovážná úroveň důchodu (vyrovnání nabídkové a poptávkové stránky na makroúrovni) je dána podílem autonomních výdajů (v součtu investičních a spotřebních) a mezního sklonu ke spotřebě s.

Vzhledem k tomu, že oba tyto druhy výdajů ovlivňují produkci stejným způsobem (nikoliv však obecně stejnou měrou), zahrneme je v dalším výkladu do společné veličiny. A bude tedy nadále vyjadřovat (bez rozlišení) celkové autonomní výdaje.

Klasická podmínka makroekonomické rovnováhy

(4.8) $$\mathbf{Y = C + I + A}$$

tak přejde (v důsledku konkretizace $\mathbf{C = c.Y}$ a při stávající absenci uvažování jiných investičních výdajů než autonomních, tj. $I_{neautonomní} = 0$) ve tvar

(4.9) $$\mathbf{Y = c.Y + A} \quad ,$$

z čehož pro rovnovážnou úroveň důchodu obdržíme odvození :

(4.10) $$\mathbf{Y = \frac{A}{1 - c} = \frac{A}{s}} \quad .$$

K výrazu **(4.10)** se v následujícím textu (jako k výchozímu vztahu charakterizujícímu rovnovážnou úroveň důchodu při lineárním statistickém multiplikátoru) ještě později několikrát vrátíme.

4.2. Model s dynamickým multiplikátorem

V modelu z předchozí části [4.1] jsme neuvažovali žádné zpoždění mezi spotřebou a důchodem ; v ekonomické realitě však spotřeba zpravidla za důchodem zaostává, neboť spotřebitelé (jak prokázaly empirické studie) zpravidla při svých spotřebních (ale nejen těchto) zvyklostech spíše vycházejí z úrovně důchodu dosažené v některém z (nepříliš vzdálených) minulých období. Toto očekávání můžeme interpretovat, jakoby se mezi obdobím bezprostředně minulým (t-1) a současným (t) očekávaná úroveň důchodu nezměnila (v okamžiku realizace své spotřeby v čase t totiž spotřebitelé obvykle přesnou úroveň důchodu z téhož období ještě neznají).

Lze tedy vyslovit hypotézu, že očekávaná spotřeba v čase t C_t (tedy vyjádřená *ex ante*) je funkcí důchodu z bezprostředně předcházejícího období t-1, tedy $\mathbf{C_{ex\,ante}} = \mathbf{C(Y_{t-1})}$, s důsledkem pro úspory . $\mathbf{S_{ex\,ante}} = \mathbf{Y_{t-1}} - \mathbf{C(Y_{t-1})}$

Dále předpokládejme, že se tato očekávaná úroveň spotřeby přece jen uskuteční, tedy že spotřeba (realizovaná *ex post*) je rovna této veličině *ex ante* a že veškeré investice jsou autonomní investice (navíc neměnící se v čase), tzn.

(4.11) $$\mathbf{C_t} = \mathbf{C(Y_{t-1})} \quad \text{a} \quad \mathbf{I_t} = \mathbf{\tilde{A}}$$ [1].

Za této konkretizace tedy můžeme rovnovážný vývoj důchodu v čase ($Y_t = C_t + I_t$) vyjádřit jako

(4.12) $$\mathbf{C_t} - \mathbf{C(Y_{t-1})} = \mathbf{\tilde{A}}$$

což ve svém důsledku vede k diferenční rovnici 1. řádu pro Y_t. Její konkrétní podoba přitom bude záviset na tvaru, který přijmeme pro spotřební funkci C (obsahující zpoždění o 1 období).

Jestliže je tato spotřební funkce lineární ($C_t = c.Y_{t-1}$) a přijmeme stejně jako dříve zjednodušení, že investice jsou v modelu přítomny pouze jako autonomní (tj. pro vyvolané investice platí $\mathbf{I_t} = 0$), a ty zachovávají po celou sledovanou dobu konstantní úroveň ($\mathbf{A_t} = \mathbf{\tilde{A}}$), dostaneme identitu pro rovnováhu

$$\mathbf{Y_t} = \mathbf{C_t} + \mathbf{I_t} + \mathbf{A_t}$$

ve tvaru

(4.13) $$\mathbf{Y_t} - \mathbf{c.Y_{t-1}} = \mathbf{\tilde{A}} \ .$$

Hledejme nyní řešení tohoto vztahu, který má platit pro libovolné období t.

Jako jednu z možností *(viz matematický dodatek o diferenčních rovnicích)* předpokládejme, že takové řešení existuje v podobě konstantní úrovně produkce, tj. ve tvaru $\mathbf{Y_t} = \mathbf{Y^*}$ ($\mathbf{Y^*}$ nějaká konstanta). Pokud takové řešení **(4.13)** $\mathbf{Y^*}$ bude existovat, bude současně platit

[1] Vlnkou nad A budeme v dalším značit případy, kdy jsou autonomní výdaje konstantní.

(4.14) $$Y^* - c.Y^* = \tilde{A} \quad \text{neboli} \quad Y^* = \frac{\tilde{A}}{1-c} \quad ,$$

kterýžto výraz vyjadřuje právě rovnovážnou úroveň důchodu při statickém multiplikátoru.[2]
Zkoumejme nyní dále, jak se bude - při tomto rovnovážném stavu - vyvíjet odchylka skutečné úrovně důchodu Y_t od této rovnovážné (konstantní) úrovně Y^*. Označme tuto odchylku $\varepsilon_t = Y_t - Y^*$.

Dosadíme-li opačně $Y_t = Y^* + \varepsilon_t$ do **(4.13)**, zjistíme, že levá strana **(4.13)** tj.

$$Y^* + \varepsilon_t - c.(Y^* + \varepsilon_{t-1}) = \varepsilon_t - c.\varepsilon_{t-1} + (1-c)Y^* = \varepsilon_t - c.\varepsilon_{t-1} + \tilde{A}$$

Má-li se získaný výraz shodovat s pravou stranou (= A), vyplývá odtud tvar analogické diferenční rovnice zapsané v odchylkách ε_t

(4.15) $$\varepsilon_t = c.\varepsilon_{t-1}.$$

Nalézt (netriviální) řešení této soustavy je velmi snadné (je jím zřejmě vztah

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0.c^t$$

pro nějakou počáteční úroveň odchylky ε_0), takže celkové řešení můžeme zapsat ve tvaru

(4.16) $$Y_t = Y^* + (Y_0 - Y^*)c^t \qquad (\text{pro } 0 < c < 1).$$

Získaný vztah můžeme popsat slovy takto : důchodová trajektorie Y_t se skládá z konstantní části - rovnovážné úrovně Y* o velikosti (4.14) - a ze složky tvořené geometrickou posloupností (jejímž kvocientem je mezní sklon ke spotřebě c) vynásobené rozdílem počátečních hodnot skutečné úrovně důchodu Y_0 a rovnovážné úrovně Y*. V důsledku omezení na hodnotu c (0 < c < 1) směřuje skutečná úroveň důchodu Y_t monotónně k rovnovážné úrovni Y* (a to tím rychleji, čím je c menší). Odstup Y_t od Y* je přirozeně tím menší, čím jsou k sobě počáteční úrovně Y_0 a Y* blíže.

Lze tedy dovodit, že tento model představovaný pouze přítomností dynamického multiplikátoru, je charakterizován stabilní rovnováhou: při vychýlení důchodu z rovnovážné úrovně Y* se důchodová trajektorie Y_t monotónně vrací k této rovnovážné úrovni.

[2] Tím jsme vlastně ukázali, že řešení pro statický multiplikátor vyhovuje i modelu dynamického multiplikátoru reprezentovaného rovnicí (4.13) .

4.3 Princip akcelerace

V této části ukážeme, že podobně jako může investiční podnět vyvolat sám o sobě změnu v úrovni produkce, je uskutečnitelný i impuls s obrácenou kauzalitou. Skutečnost, že dojde ke zvýšení produkce, může mít zpětný efekt na investiční pobídku.

V následujícím výkladu již budeme důsledně odlišovat autonomní investice od vyvolaných.

Nejprve však vyslovme několik vysvětlujících poznámek, jejichž smyslem je mj. odlišení všech zjednodušení, kterých se při takovéto formulaci makroekonomického modelu dopouštíme vědomě, od případných specifikačních problémů (tj. těch, které jsou spojeny s uvažováním odlišných modelových specifikací) .

P1. Formulace dynamických modelů musí umožňovat důsledné rozlišení autonomních a vyvolaných investic. Prvé z nich budeme důsledně značit A, druhé pak I.

P2. V ekonomickém prostředí je velmi důležité rozlišovat mezi fixním a oběžným kapitálem. Jak známo, první představují potenciální výrobní faktory jako budovy, stavby, stroje, zařízení, půda apod, zatímco hlavními součástmi druhého jsou zásoby, meziprodukty a nedokončená výroba. V následujícím se především soustředíme na fixní kapitál, přičemž vědomě zanedbáme přechodné období změn v kapitálu oběžném.

P3 Investice do fixního kapitálu budeme chápat jako čisté investice, tj. od hrubých investic odečteme opotřebení kapitálových statků (amortizaci). Můžeme to zdůvodnit tím, že změny v produkci vyvolávají právě tyto čisté investice, které mohou ostatně nabývat kladné i záporné hodnoty.

P4. Čisté investice vyjádříme jako derivaci funkce udávající množství kapitálu. Tak tomu bude u kapitálu fixního i oběžného.

P5. Zanedbáme skutečnost, že zpravidla v kterémkoliv období existují (aspoň v části výrobního sektoru) přebytečné výrobní kapacity. Zvýšená poptávka po produkci pak vede nejprve ke zvýšení míry využití stávajících výrobních kapacit a až poté si (zpravidla s časovým odstupem, neboť výrobní zařízení je většinou třeba objednat u výrobců a čekat na jejich zhotovení, které si často vyžádá řadu měsíců) vyžádá nové kapitálové investice.

Princip akcelerace: rostoucí tok produkce vyžaduje větší množství kapitálu a sekundárně vyvolává investice.

Konkrétní matematické výrazy pro akcelerátor (nemusí jít vždy o stejný tvar) uvedeme při výkladu jednotlivých modelových specifikací.

4.5 Harrod -Domarův růstový model (s akcelelerátorem)

Jak jsme v předchozím ukázali, případ statického multiplikátoru vede k rovnovážnému stavu, který je v čase stabilní, přítomnost akcelerátoru naopak vyvolává spíše explozívní tendence. Vzniká otázka, co lze očekávat od kombinace obou těchto faktorů ?

Takto formulovaný problém v minulosti zkoumali nejdříve **Lundberg [1937]**, poté **Harrod [1948]** a **Domar [1946]**. Jejich model předpokládá následující rozdělení produkce na složky :

C - (neautonomní) spotřeba
I - neautonomní investice
A - autonomní výdaje (a to spotřební i investiční).

Dekompozice produkce/důchodu $\mathbf{Y}$ v Harrod-Domarově modelu vypadá následovně :

(4.17) $$\mathbf{Y(t) = C(t) + I(t) + A(t)} \quad \text{, kde} \quad \mathbf{A(t) = \tilde{A} = konst.}$$

přičemž zde předpokládáme následující závislost spotřeby a (vyvolaných) investic na produkci, resp. na jejím přírůstku :

(4.18A) $$\mathbf{C(t) = c.Y(t)}$$ (lineární spotřební funkce), kde c $\in$ <0,1>

(4.18B) $$\mathbf{I(t) = v.\frac{dY(t)}{dt}}$$ (akcelerátor s investičním koeficientem v > 0).

Sloučením **(4.18A)** a **(4.18B)** dostaneme vztah

(4.19) $$\mathbf{Y(t) = c.Y(t) + v.\frac{dY(t)}{dt} + \tilde{A}}$$, neboli po úpravě

(4.20A) $$\mathbf{dY(t).v = Y(t).(1-c) - \tilde{A}}$$, resp.

(4.20B) $$\mathbf{\frac{dY(t)}{dt}.v = Y(t).\frac{(1-c)}{v} - \frac{\tilde{A}}{v}}$$ nebo ještě stručněji

(4.20C)

$$\mathbf{\frac{dY(t)}{dt} = \rho.\left(Y(t) - \frac{\tilde{A}}{s}\right)}, \text{ kde } \rho = \frac{s}{v}$$ (s = 1-c je mezní sklon ke spotřebě).

Vztah **(4.20C)** představuje diferenciální rovnici 1.řádu, jejímž vyřešením dostaneme trajektorii průběhu vývoje produkce $\mathbf{Y}$ v čase $\mathbf{t}$. Uvažujme v této souvislosti zejména dva případy :

Poznámka: I zde je „konstantní rovnovážná trajektorie“ tvaru $\mathbf{Y^* = \tilde{A}/s}$ řešením modelu, což je okamžitě zřejmé z dosazení do **(4.20)** :

$$\frac{\mathbf{dY^*}}{\mathbf{dt}} = 0 \quad \text{a rovněž také} \quad \rho.\left(\mathbf{Y}^* - \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\mathbf{s}}\right) = \rho.\left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\mathbf{s}} - \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\mathbf{s}}\right) = 0 . \qquad \square .$$

Případ 1: Autonomní výdaje jsou konstantní v čase t , tj. A (t) = A*.

Vyšetřeme nejprve vývoj odchylky $\varepsilon(\mathbf{t})$ od konstantní rovnovážné úrovně $\mathbf{Y^* = \tilde{A}/s}$

Pro $$\varepsilon(\mathbf{t}) = \mathbf{Y(t)} - \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\mathbf{s}}$$ dostaneme mj, že

$$\frac{\mathbf{d}\varepsilon(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{dY(t)}}{\mathbf{dt}}$$, v důsledku čehož lze **(4.20C)** přepsat do tvaru

(4.21) $$\frac{\mathbf{d}\varepsilon(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}} = \rho.\varepsilon(\mathbf{t}) \quad , \text{ kde } \quad \rho = \frac{1-\mathbf{c}}{\mathbf{v}} > 0$$

Obvyklým převedením na derivaci logaritmu $\varepsilon(\mathbf{t})$ získáme ze **(4.21)** vztah

(4.22) $$\frac{\mathbf{d}\log\varepsilon(\mathbf{t})}{\mathbf{dt}} = \rho$$ a po navazující integraci pak

(4.23) $$\log\varepsilon(\mathbf{t}) = \rho.\mathbf{t} + \kappa$$, kde κ je nějaká konstanta.

Řešení rovnice **(4.23)** je tedy dáno vztahem

(4.24) $$\varepsilon(\mathbf{t}) = \mathrm{K}.\mathbf{exp}(\rho.\mathbf{t})$$, přičemž

multiplikativní konstantu $\mathrm{K} = \mathbf{exp}(\kappa)$ určíme následovně z počáteční podmínky $\varepsilon(0) = \mathrm{K}.\mathbf{exp}(0)$, tzn. K je rovna počáteční úrovni odchylky $\varepsilon(0)$ od rovnovážné úrovně produkce $\mathbf{Y}(0) - \mathbf{Y}^*(0)$.

Jak jsme z předchozího vyvodili, **při konstantních autonomních výdajích roste produkce progresívně s konstantní intenzitou růstu ρ, která závisí (přímo) na mezním sklonu ke spotřebě s a (nepřímo) na investičním koeficientu ν.** Pohybujeme-li se v konkrétních hodnotách, shledáme, že hodnota investičního koeficientu ν je relativně velká vůči (malé) hodnotě mezního sklonu ke spoření s. To znamená, že podíl ρ = s/ν nabývá poměrně nízké hodnoty : např. pro s = 0,08 a ν = 2,0 bude důchodová trajektorie představována exponenciálním průběhem se 4% roční růstovou intenzitou.

Toto přiblížení názorně ilustruje povahu akcelerátoru : I když udržujeme autonomní výdaje (pouze) na konstantní výši, vyvolává kombinované působení multiplikátoru-akcelerátoru stálý progresívní růst produkce, jehož intenzita závisí na podílu strukturních parametrů s a ν. Dokumentuje to tedy převážení explozívního vlivu akcelerátoru.

Případ 2 : Autonomní výdaje rostou exponenciálně s intenzitou růstu μ.

Tentokrát budeme předpokládat exponenciální (kvantitativně však mírný) růst autonomních výdajů s intenzitou růstu $\mu > 0$, neboli

$$A(t) = A(0).\exp(\mu.t),$$

kde $A(0)$ vyjadřuje počáteční úroveň autonomních výdajů. Rovnice **(4.20C)** se pro tento případ modifikuje na tvar

(4.25) $$\frac{dY}{dt} = \rho.\left[Y(t) - A(0).\frac{e^{\mu.t}}{s}\right] \text{, kde } \rho = \frac{s}{v} \quad \text{shodně jako dříve .}$$

Vyslovme hypotézu, že by netriviálním řešením této rovnice mohla být trajektorie $Y(t) = Y^*(0).e^{\mu.t}$, kde $Y^*(0)$ představuje počáteční rovnovážnou úroveň. Při ověřování přijatelnosti tohoto řešení (dosazením do **(4.25)**) obdržíme vztah

(4.26) $$\frac{dY}{dt} = \mu.Y^*(0).e^{\mu.t} = \rho.\left[Y^*(0).e^{\mu.t} - A(0).\frac{e^{\mu.t}}{s}\right]$$

Tato rovnice nám umožňuje vypočítat počáteční rovnovážnou úroveň $Y^*(0)$, která - je-li jí dosaženo - vede k důchodové trajektorii předpokládaného typu $Y(t) = Y^*(0).e^{\mu.t}$. Úpravou, mj. krácením obou stran **(4.26)** výrazem $e^{\mu.t}$ dostaneme

$$Y^*(0).(\mu - \rho) = -\rho.\frac{A(0)}{s} \quad ,$$

z čehož vyjádříme $Y^*(0)$ jako $Y^*(0) = \rho.\dfrac{A(0)}{s.(\rho - \mu)}$ a ještě dále (dosazením $\rho = \dfrac{s}{v}$) pak výsledek

(4.27) $$Y^*(0) = \frac{A(0)}{v.(\rho - \mu)}$$

Pokud tedy je počáteční úroveň důchodu právě $Y^*(0)$ z **(4.27)**, roste důchod exponenciálně s intenzitou růstu μ .

Zbývá nicméně ještě vyšetřit, jak bude vypadat důchodová trajektorie, pokud počáteční hodnota Y(0) nebude právě rovna výrazu v **(4.27)**. Uvažujme za tímto účelem průběh odchylky

$\varepsilon(t) = Y(t) - Y^*(0).e^{\mu t}$. Na počátku máme zřejmě $\varepsilon(0) = Y(0) - Y^*(0)$.

Vyjádřeme dále rozdíl mezi **(4.25)** a **(4.26)** a všimněme si, že pro derivace platí :

(4.28) $$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt} - \mu.Y^*(0).e^{\mu.t} \quad .$$

Upravme při této skutečnosti postupně levou stranu **(4.28)**:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt} - Y^*(0).\mu.e^{\mu.t} = \rho.Y(t) - \rho.A(0).\frac{e^{\mu t}}{s} - \rho.Y^*(0).e^{\mu t} + \rho.A(0).\frac{e^{\mu t}}{s} =$$
$$= \rho.Y(t) - \rho.Y^*(0).e^{\mu t} = \rho\left(Y(t) - Y^*(0).e^{\mu t}\right)$$

protože druhý a čtvrtý člen předposledního výrazu se vzájemně vyruší. Závorka posledního členu ovšem dává právě hodnotu odchylky ε (t) . Pak tedy

(4.29) $$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \rho.\varepsilon(t)$$ s řešením

(4.30) $$\varepsilon(t) = \varepsilon(0).e^{\rho.t}$$

Tento výsledek je formálně podobný dříve získanému řešení **(4.24)** při konstantních autonomních výdajích, tentokrát však vypočtená **diference** ε**(t) představuje odchylku od trajektorie exponenciálního růstu důchodu Y(t) = Y*(0).** $e^{\mu t}$, nikoliv od konstantní rovnovážné úrovně **Y*(t) = A*/s**. Jinými slovy : jde o exponenciální růst (s parametrem ρ) odchylky od exponenciálního růstu produkce (s parametrem μ).

Obecné (úplné) řešení příslušné diferenciální rovnice je tedy následující :

(4. 31) $$Y(t) = Y^*(0).e^{\mu.t} + \left(Y(0) - Y^*(0)\right)e^{\rho t}$$, kde

počáteční stav „důchodového systému“ je určen úrovní

(4.32) = (4.27) $$Y^*(0) = \frac{A(0)}{v.(\rho - \mu)} \quad .$$

4.5 Phillipsův model multiplikátoru

Zavedení časových zpoždění poskytuje realističtější obraz vztahů mezi (makro)-ekonomickými veličinami. Jedním z představitelů modelů tohoto typu je Phillipsův model multiplikátoru. Jde o model spojitého typu s lineární spotřební funkcí a obsahuje ***multiplikátor odpovídající exponenciálně rozdělenému zpoždění*** (mezi skutečnou úrovní důchodu Y a jeho potenciální hodnotou Z).

Poptávková strana strana modelového schématu (rozdělení důchodu na spotřebu a autonomní výdaje) neobsahuje zpoždění : předpokládá se zde, že se uskuteční plánovaná spotřeba vyjádřená lineární spotřební funkcí $\mathbf{C = c.Y}$ a že spotřebitelé mají své autonomní výdaje shrnuty v modelové proměnné $\mathbf{A}$. Celkovou poptávku lze tedy vyjádřit jako $\mathbf{z(t) = c.Y(t) + A(t)}$ neboli

(4.33) $$\mathbf{Z(t) = (1-s).Y(t) + A(t)}$$

Nabídková strana tohoto agregovaného makroekonomického modelu obsahuje multiplikátor formulovaný v podobě *(teoreticky délkou neomezeného)* exponenciálně rozloženého zpoždění :

(4.34) $$\mathbf{\frac{dY(t)}{dt} = -\lambda.[Y(t) - Z(t)]}$$

kde λ je veličina udávající **rychlost reakce multiplikátoru** - rychlost přizpůsobování skutečné velikosti důchodu $\mathbf{Y}$ jeho potenciální hodnotě $\mathbf{Z}$. Sloučením (4.33) a (4.34) dostaneme

(4.35) $$\mathbf{\frac{dY(t)}{dt} + \lambda.Y(t) = \lambda.Z(t) = \lambda.(1-s).Y(t) + \lambda.A(t)}$$ neboli

(4.36) $$\mathbf{\frac{dY(t)}{dt} + \lambda.s.Y(t) = \lambda.A(t)} \quad .$$

Výraz (4.36) představuje, jak patrno, lineární diferenciální rovnici 1. řádu, jejíž řešení nyní nalezneme.

Nejprve snadno ověříme, že řešení nalezené pro případ statiického multiplikátoru, tj. řešení $\mathbf{Y^*(t) = Y^* = \frac{\tilde{A}}{s}}$ vyhovuje této rovnici: Skutečně, zde $\mathbf{\frac{dY(t)}{dt}} = 0$ (autonomní investice se v čase nemění) a $\mathbf{\lambda.s.Y^* = \lambda.\tilde{A}}$ zcela ve shodě s pravou stranou **(4.36)**.

Řešení Phillipsova modelu multiplikátoru

Vyjádřeme nyní opět rozdíl $\mathbf{\varepsilon(t) = Y(t) - Y^*}$ tj.odchylku skutečné hodnoty $\mathbf{Y}$ od rovnovážného stavu $\mathbf{Y^*}$:

Dostaneme $\mathbf{Y(t) = Y^* + \varepsilon(t)}$, z čehož plyne $\frac{\mathbf{dY(t)}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d\varepsilon(t)}}{\mathbf{dt}}$ a dále přepisem (4.36) vztah

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \lambda s.(Y^* + \varepsilon(t)) = \lambda.\tilde{A}$$

Odtud (protože $\acute{Y}^* = \frac{\tilde{A}}{s}$) dospějeme k homogenní lineární diferenciální rovnici

(4.37) $$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \lambda.s.\varepsilon(t) = 0.$$

jejíž řešení snadno nalezneme. Standardní úpravou (převedením na derivaci logaritmu y) obdržíme

(4.38) $$\frac{d\ln\varepsilon(t)}{dt} = -\lambda.s$$, jejímž řešením je průběh odchylky

(4.39) $$\varepsilon(t) = \varepsilon_0.\exp(-\lambda st)$$

Celkové řešení (důchodovou trajektorii $\mathbf{Y(t)}$ popsanou diferenciální rovnicí **(4.36)** dostaneme tedy ve tvaru:

(4.40) $$Y(t) = Y^*(t) + \left[Y(0) - Y^*(0)\right]\exp(-\lambda st)$$

Charakterizujme nyní dosažený výsledek : Trajektorie, která popisuje skutečnou úroveň důchodu Y(t) je dána součtem rovnovážné úrovně důchodu $\mathbf{Y^*(t)}$ a odchylky představované součinem $\mathbf{Y(0) - Y^*(0)}$ a záporné exponenciály $\mathbf{\exp(-\lambda st)}$. Vzhledem k zápornosti argumentu v exponenciále ($\lambda > 0$, $s > 0$, $t \geq 0$) je patrné, že s rostoucím časem se odchylka $\mathbf{Y}$ od rovnovážné hodnoty $\mathbf{Y^*}$ postupně zmenšuje, přičemž rychlost konvergence skutečné úrovně k rovnovážné závisí na parametru rychlost reakce $\boldsymbol{\lambda}$ a na koeficientu mezního sklonu k úsporám $\mathbf{s}$. Odchylka v čase t je rovněž závislá (přímo úměrně) na vzdálenosti počáteční hodnoty $\mathbf{Y(0)}$ od $\mathbf{Y^*}$.

Jestliže se tedy systém na počátku nachází v počáteční úrovni $\mathbf{Y(0)}$, sleduje produkce ve spojitě uvažovaném čase průběh popsaný trajektorií **(4.40)**, dle níž produkce monotónně směřuje k rovnovážné úrovni dané konstantou $\mathbf{Y^* = \tilde{A}/s}$.

4.6 Phillipsův model akcelerátoru a multiplikátoru

Tento model se liší od předchozího především tím, že je do něj zaveden akcelerátor charakterizující podnět pro zvýšení investic (jako závisle proměnné) podnícený růstem produkce (v minulém období)

Označíme-li jako $\mathbf{I}$ veličinu (čistých) vyvolaných investic, bude mít akcelerátor tvar

(4.41) $$\frac{dI(t)}{dt} = -\kappa.\left(I(t) - \nu.\frac{dY(t)}{dt}\right)$$

v němž konstanta ν představuje investiční koeficient a konstanta κ rychlost reakce. Výraz ν**.dY(t)/dt** může být považován za určitou potenciální úroveň vyvolaných investic, za níž se opožďuje skutečná veličina $\mathbf{I}$. Makrospotřební funkce je opět lineární, neobsahující časové zpoždění:

(4.42) $$C(t) = c.Y(t) = (1-s)Y(t)$$

Nabídková stránka modelu je představována vztahem identickým s **(4.34)**

(4.43) $$\frac{dY(t)}{dt} = -\lambda.(Y(t) - Z(t))$$

Model multiplikátoru-akcelerátoru tedy **sestává ze tří rovnic (4.41),(4.42),(4.43)**, přičemž jeho integrujícím prvkem je opět identita rozdělení poptávky

(4.44) $$Z(t) = C(t) + I(t) + A(t) = (1-s).Y(t) + I(t) + A(t)$$

Jak je z definičních vztahů **(4.41)** - **(4.44)** patrné, v modelu se vyskytují dvě rozložená zpoždění spojitého (exponenciálního) typu. Jedno z nich je na nabídkové straně: poptávka reaguje na rozdíl mezi skutečnou a potenciální hodnotou produkce s rychlostí λ, druhé zpoždění je na straně akcelerátoru: přírůstek investic reaguje na změny v produkci s rychlostí κ .

Poznámka: Výrazy **(4.41)** pro akcelerátor a **(4.43)** pro multiplikátor jsou odvozeny na základě teorie modelů rozložených zpoždění (konkrétně ***modelu s (nekonečným) exponenciálním zpožděním***). Zde je levostranná proměnná – tzn. v **(4.41)** změna vyvolaných investic, v **(4.42)** změna důchodu – popsána funkcí zahrnující vždy skutečnou a potenciální úroveň této proměnné. Výraz ν**.dY(t)/dt** v **(4.41)** představuje takovouto potenciální úroveň investic, zatímco v **(4.43)** je potenciální úroveň důchodu ztotožněna s celkovou poptávkou **Z(t). Konstanta** κ se nazývá ***rychlost reakce akcelerátoru*****, konstanta** λ **rychlost reakce multiplikátoru.** Obě jsou kladná čísla, nulová hodnota by znamenala, že k žádnému přizpůsobení (skutečné hodnoty hodnotě potenciální) nedochází.

Další krok v analýze tohoto modelu spočívá v nalezení jeho řešení, které - jak je z povahy vztahů patrné - bude představováno diferenciální rovnicí vyššího než prvního řádu. Abychom tuto rovnici zformulovali a příslušné řešení nalezli, dosadíme nejprve vztah (4.43) do (4.42). Dostaneme

(4.45) $$\frac{dY(t)}{dt} = -\lambda.Y(t) + \lambda.\left[(1-s).Y(t) + I(t) + A(t)\right],$$ což po úpravě vede k

(4.46) $$I(t) = \frac{1}{\lambda}.\frac{dY(t)}{dt} + s.Y(t) - A(t)$$ resp. k

(4.47) $$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{\lambda}.\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + s.\frac{dY(t)}{dt}$$,

neboť i zde přijímáme předpoklad, že veličina $A(t)$ je v modelu uvažována jako konstantní $A(t) = \tilde{A}$.

Výrazy pro $I(t)$ a $dI(t)/d(t)$ nyní dosadíme do **(4.41)**:

$$\frac{1}{\lambda}.\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + s.\frac{dY(t)}{dt} = -\kappa.\left[\frac{1}{\lambda}.\frac{dY(t)}{dt} + s.Y(t) - \tilde{A}\right] + \kappa.\nu.\frac{dY(t)}{dt} .$$

Přeskupením jednotlivých členů do pořadí s klesajícím stupněm diferenciálních členů dostaneme

(4.48) $$\frac{1}{\lambda}.\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \left(s + \frac{\kappa}{\lambda} - \kappa.\nu\right).\frac{dY(t)}{dt} + \kappa.s.Y(t) = \kappa.\tilde{A}$$

kterýžto výraz představuje lineární diferenciální rovnici 2. řádu obecného tvaru

(4.49) $$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + a.\frac{dY(t)}{dt} + b.Y(t) = c$$

v níž jednotlivé konstanty mají konkretizaci $a = \lambda.s + \kappa - \kappa.\lambda.\nu$, $b = \lambda.\kappa.s$, $c = \lambda.\kappa.\tilde{A}$.

Poznámka: Jedním z řešení rovnice **(4.48)** je opět trajektorie $Y(t)$ odpovídající rovnovážnému stavu $Y(t) = Y^* = \frac{\tilde{A}}{s}$, o čemž se lze snadno přesvědčit přímým dosazením: zde platí $\frac{dY(t)}{dt} = 0$ a tedy i $\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = 0$, takže levá strana **(4.48)** je rovna $\kappa.s.\frac{\tilde{A}}{s}$, tedy pravé straně. □ .

Zaměříme-li se dále na vývoj odchylek od rovnováhy tzn. $\varepsilon(t) = Y(t) - Y^*$, ukáže se opět jako v řadě předchozích případů , že i zde lze dospět k lineární diferenciální rovnici 2. řádu tvaru pro tyto odchylky.:

(4.50) $$\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} + a.\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + b.\varepsilon(t) = c$$

Řešení Phillipsova modelu akcelerátoru-multiplikátoru

Řešení této rovnice má - na rozdíl od předchozích případů - nemonotónní, oscilační charakter. Ten dále může jak tlumený (se zmenšující se amplitudou). tak explozivní (amplituda v čase roste), přičemž tyto oscilace kmitají kolem rovnovážného bodu $Y^* = \tilde{A}/s$.

Pokud bychom toto řešení zkoumali podrobněji, zaznamenáme, že je nutno uvažovat
dvě počáteční podmínky:

Prvá z nich charakterizuje stav ve výchozím bodě „0“, tj. pro t = 0, kde zřejmě **Y(0) = 0**, druhá pak popisuje v témže časovém okamžiku „0“ situaci před započetím působení akcelerátoru. Tato druhá podmínka, která je dána multiplikátorem, má tvar

(4.51) $$\frac{dY(t)}{dt} = \lambda.A \quad \text{pro } t = 0$$

Průběh důchodu od jedné rovnovážné úrovně ke druhé je tedy popsán rovnicí **(4.48)** s počátečními podmínkami $Y(0) = 0$ a **(4.51)**.
Řešení lineární diferenciální rovnice **(4.50)** probíhá klasickým způsobem. ***************************

Uvědomme si, že zde vystupuje čtveřice parametrů, jmenovitě s, v, λ, κ, která může ovlivnit (a také silně ovlivňuje) charakter výstupní důchodové trajektorie.

Výsledkem analýzy , při které (aspoň pro částečné zjednodušení pokládáme $\kappa = 1$) je následující[3]

A) pro případ $\frac{1}{\lambda} < \left[\sqrt{v} - \sqrt{s}\right]^2$ bude výsledná trajektorie **neoscilující explozivní**

B) pro $\left[\sqrt{v} - \sqrt{s}\right]^2 < \frac{1}{\lambda} < v - s$ bude výsledná trajektorie **oscilující explozivní**

C) pro $v - s < \frac{1}{\lambda} < \left[\sqrt{v} + \sqrt{s}\right]^2$ bude výsledná trajektorie **oscilující tlumená**

D) pro případ $\left[\sqrt{v} + \sqrt{s}\right]^2 < \frac{1}{\lambda}$ bude výsledná trajektorie **neoscilující tlumená**

S ohledem na velikost parametrů v realitě , kde platí $s << v$, budou všechny meze kladná čísla.

Vysvětlivky:

Oscilujícím průběhem rozumíme nemonotónní periodicky se opakující růst střídaný klesáním (jako u funkcí **sin** či **cos**) . Opačný průběh trajektorie (monotónní) nazveme **neoscilující.**

Explozívním průběhem rozumíme takový průběh, kdy se odchylky od konstantního rovnovážného stavu postupně zvětšují. Pokud se tyto odchylky postupně zmenšují (a trajektorie se přibližuje konstantní úrovni) , pak mluvíme o **tlumeném průběhu**. Není-li průběh ani explozivní, ani tlumený, pak jde o setrvání na konstantní odchylce od rovnovážného stavu. Tomu budou odpovídat přechodové stavy mezi **A)**, **B)**, **C)**, **D)** , kdy relace “ < “ mezi horní a dolní mezí budou nahrazeny rovnostmi.

[3] Podrobné odvození lze nalézt např.R.G.D. Allen: Matematická Ekonomie str. 250-255.