Klasická indexní čísla v prostředí axiomatické teorie I. Fishera

Průměry jako prostředek formulace indexních čísel

Tři klasičtí představitelé moderní formalizované ekonomie **Stanley W. Jevons, [1865], Francis Y.Edgeworth [1881] a Alfred Marshall [1887] se snažili nalézt objektivní hlediska, jak řešit formulovaný problém rigorózně**, **s použitím** nemnoha tehdy známých **výsledků statistické analýzy**. Několik v té době známých konstruktů bylo založeno na prostých nebo vážených průměrech (*aritmetickém či geometrickém*) a úlohou bylo vyšetřit, které vlastnosti přisoudit indexnímu číslo jako nutné a pokusit se zdůvodnit návrhy IČ čísel ve světle chování ekonomické reality.

Vůbec první "indexní číslo" navrhl již v r. 1738 století Charles Dutot jako prostý podíl zprůměrovaných cen komodit v běžném a v základním období, tj. výraz

$$\frac{\sum p_i(1)}{N} \Big/ \frac{\sum p_i(0)}{N}$$

Byla přitom vyslovena tato úvaha: ***Za normálního stavu by se cenový vývoj ekonomického komplexu měl odehrávat tak, že změna*** *(obvykle vzestup)* ***ceny jedné z uvažovaných komodit mezi dvěma obdobími by měl být postupně provázen analogickou změnou*** *(vzestupem)* ***cen ostatních komodit***. Tím by mělo dojít (připusťme malé časové zpoždění) k (téměř) proporční změně cen všech uvažovaných komodit mezi těmito obdobími. **Edgeworth a Jevons usuzovali, že nepravidelnosti, které v realitě u (nestejného) vývoje cen komodit pozorujeme, jsou způsobeny (kromě zpoždění) především chybami v pozorování hodnot (cen) příslušného statistického souboru*/**.

Tehdy zastávaný názor vycházel z úvahy, že **na vektor podílových změn cen**

$$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \qquad i = 1,2,\dots\dots,N$$

lze pohlížet jako na konečnou množinu realizací náhodné veličiny X **"všeobecná cenová změna"**, a že každý konkrétně vyšetřovaný soubor podílových cenových změn $p_i(1)/p_i(0)$ má charakter náhodného výběru, jehož prvky jsou vzájemně nezávislé a stejně rozdělené. Přitažlivost tohoto nazírání byla podložena statistickými vývody, neboť je známo, že:

a) **jsou-li složky náhodného vektoru** $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ **nezávisle a stejně normálně rozděleny** $N(\mu;\delta^2)$**, pak nestrannou odhadovou funkcí (získanou např. metodou maximální věrohodnosti) střední hodnoty** μ **je aritmetický průměr prvků výběrového souboru** $\bar{x}^A = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

b) **jsou-li složky náhodného vektoru** $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ **nezávisle a stejně logaritmicko-normálně rozděleny** $LN(\mu;\delta^2)$**, pak nestrannou odhadovou funkcí** (získanou **metodou maximální věrohodnosti) střední hodnoty** μ **je prostý geometrický průměr prvků výběrového souboru** $\bar{x}^G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} (x_i)}$

V Edgeworthově pohledu (nazývaném *varianta stochastického standardního přístupu*) **lze zaznamenat snahu po vyjádření přesnosti měření individuálních cenových změn adekvátním váhovým vektorem**. Na druhé straně je však tímto přesnosti měření přikládán význam nesouvisející s tím, jaká je významnost komodity v analyzovaném spotřebním koši (vyjádřená např. objemem její spotřeby).

Přes inspirativnost byl nicméně záhy tento přístup odmítnut pro zřetelné znásilnění ekonomické reality ve prospěch uvedeného teoreticko-statistického schématu. **Jak později ukázali A.L.Bowley a J.M.Keynes**, **odporují tomuto pohledu jak empirické tak teoretické důvody**: **Empirická šetření nedala za pravdu domněnkám o normalitě ani logaritmické normalitě rozdělení cenových poměrů** (až snad na ojedinělé případy). Podobně, **reálné projevy cenového vývoje různých komodit jsou charakteristické tím, že vývoj cen určité skupiny komodit se zpravidla (v krátkém či delším horizontu) systematicky liší od vývoje cen jiné skupiny** (v závislosti např. na substitučních aspektech) a **ke sbližování trendů nemusí dojít ani po velmi dlouhém období**. Zde hraje zřejmou úlohu provázanost cen se spotřebou charakteristická pro prostředí všeobecné ekonomické rovnováhy : **ceny či jejich podíly nejsou v ekonomickém prostředí rozděleny náhodně**.

Edgeworthův přístup udává nicméně základní **motivaci pro** racionální **konstrukci indexního čísla tím, že usiluje o vystižení "střední cenové změny" nějakým průměrováním podílů** $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$.

Přirozeným způsobem, jak zlepšit vlastnosti průměrování podílů $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ **, je použití vážených typů průměrů**. Přitom můžeme volit jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah α_i, které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity (z hlediska ceny či kvantity) na celkovém agregátním vyjádření.

Máme-li **čtyři základní typy průměrů** (aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický), lze dospět ke čtyřem použitelným agregujícím konstruktům :

A. Indexní čísla založená na aritmetickém průměru: $$P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

B. Indexní čísla založená na geometrickém průměru: $$P_{01}^{G} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\alpha_i}$$

C. Indexní čísla vycházející z harmonického průměru: $$\frac{1}{P_{01}^{H}} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \left(\frac{p_i(0)}{p_i(1)} \right)$$

D. Indexní čísla založená na kvadratickém průměru: $$P_{01}^{Q} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^2}$$

Prosté průměry, z nichž se některým též dostalo specifického pojmenování (při operování s podílovými cenovými změnami), dostaneme snadno z vážených volbou rovnoměrných vah tj. při $\alpha_{i;} = \frac{1}{N}$. Kvadratický průměr se oproti třem ostatním používá v prostředí indexních čísel nejřidčeji.

Pro váhy α_i budeme předpokládat standardní omezení spočívající v jejich nezápornosti (též s ohledem na nezápornost kvantit a kladnost cen) a dále **v tom, že jejich součet (uvažovaný přes všech N komodit) je jedničkový**,

$$\alpha_i \geq 0 \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

Použitelnými způsoby vyjádření odlišnosti váhového podílu každé komodity na celkovém agregátním komplexu jsou např. volby vah následujícího typu :

$$\alpha_i = \frac{q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} q_i(*)} \qquad \alpha_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(*)} \qquad \alpha_i = \frac{p_i(1) \cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(*)}$$

Z obecné teorie středních hodnot vyplývá, že pro libovolnou n-tici nezáporných čísel **platí nerovnosti pro vztahy mezi průměry (prostými i váženými)**

$$P_{01}^{H} \leq P_{01}^{G} \leq P_{01}^{A} \leq P_{01}^{Q}$$

Všechny tyto průměry lze totiž zapsat jako zvláštní formy obecného výrazu pro střední hodnotu řádu ρ.

Tuto obecnou střední hodnotu lze pro průměry prostého typu vyjádřit výrazem

$$P^{\rho}{}_{01} = \left(\frac{1}{N} . \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}.$$

resp. pro průměry váženého typu ji lze zapsat analogicky jako

$${}_{\alpha}P^{\rho}{}_{01} = \left(. \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}.$$

Aritmetický průměr je zvláštním **případem obecné střední hodnoty při volbě ρ = 1, kvadratický průměr při volbě ρ = 2, harmonický průměr obdržíme při dosazení ρ = -1 a geometrický průměr je limitním případem obecné střední hodnoty řádu ρ, pokud se hodnota ρ limitně blíží k 0.**

Vzorce platí jak pro prosté, tak pro vážené průměry, pokud váhy splňují podmínky – platnost nerovností se zachovává i při určitém uvolnění podmínek.

Pro jakékoliv dvě střední hodnoty řádů r,s pro které platí nerovnost řádů, tj. např. r < s, vždy platí nerovnosti

$$\boldsymbol{P_{01}}^{r} < \boldsymbol{P_{01}}^{s} \qquad \text{resp.} \qquad {}_{\alpha}\boldsymbol{P_{01}}^{r} < {}_{\alpha}\boldsymbol{P_{01}}^{s}$$

Klasická (statistická) indexní čísla

Vůbec nejjednodušší případ "rozumného indexního čísla" představuje

<u>1. CARLIho/SAUERBECKovo indexní číslo</u> [Gian-Ricardo Carli 1764, Augustus M.Sauerbeck 1885]

$$P^{S}{}_{01} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)},$$

které je prostým aritmetickým průměrem podílových cenových změn. Jde o nejjednodušší možný přístup k agregaci podílových změn $p_i(1)/p_i(0)$ bez možnosti (průměr je nevážený) **uplatnit jakákoliv hlediska k vyjádření rozdílné významnosti jednotlivých komodit v celkovém agregátním vyjádření.**

Nahradíme-li aritmetické průměrování geometrickým, lze formulovat jednoduchý výraz nazývaný

<u>2. JEVONSovo indexní číslo</u> [William Stanley Jevons 1865]

$$P_{01}^{J} = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{\frac{1}{N}}$$

Tento indexní konstrukt je pojmenován po anglickém ekonomu Stanley W. Jevonsovi. Tvoří ho prostý geometrický průměr podílových cenových změn. Jak vyplývá z již zmíněných obecných zákonitostí pro jednotlivé typy průměrů operujících s nezápornými veličinami, poskytuje Jevonsův index vždy nižší v hodnotu než Carliho/Sauerbeckův index – rovnost nastává jen pro netypický případ, kdy by všechny podílové cenové změny $p_i(1)/p_i(0)$ nabývaly stejnou hodnotu. Jinými slovy řečeno to znamená, že geometrický průměr "střední hodnotu" těchto cenových změn podhodnocuje, zatímco aritmetický ji nadhodnocuje.

Jak Carliho/Sauerbeckovo tak Jevonsovo indexní číslo vykazují určité slabiny, které je znehodnocují vzhledem k možnosti praktického použití:

- Nutnost výskytu shodných komodity zařazené do příslušných spotřebních košů (což může činit problém v situacích, kdy jsou obě období časově značně vzdálená),
- Vyloučení přítomnosti volných statků (komodit s nulovými cenami) **v základním období, u Jevonsova indexu –** nemá-li být index identicky nulový – navíc **i v běžném období.**
- Nemožnost odlišit rozdílnost přínosu cenových podílů různých komodit k hodnotě souhrnného indexu v praktických situacích. (Změna ceny chleba i ceny pepře se v indexu uplatní stejnou vahou navzdory diametrálně odlišné spotřebě těchto komodit u všech spotřebitelů). *Stejnou slabinou by ostatně trpěl i (prostý) harmonický či kvadratický průměr.*

Přirozeným způsobem, jak zlepšit vlastnosti (prostého) průměrování podílů $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$, je proto použití vážených typů průměrů. Přitom můžeme volit jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah α_i, které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity (z hlediska ceny či kvantity) na

celkovém agregátním indexním vyjádření.

Příkladem indexů "váženého typu" je dvojice indexních čísel, Laspeyresovo a Paascheho, která využívají aritmetický způsob vážení kvantitami získanými měřením spotřeby komodit .

3. LASPEYRESovo indexní číslo [Ernst Louis Etienne Laspeyres 1871]

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

tzn. jde o vážený aritmetický průměr cenových změn, s vahami $\alpha_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}$ Pak

$$_{\alpha}P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} = P_{01}^{\ L}$$

Laspeyresův index obdržíme také jako vážený harmonický průměr, pokud zvolíme

$$\alpha_i = \frac{p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(0)}, \text{ protože } \frac{1}{_{\alpha}P_{01}^{H}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1).q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) q_j(0)} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(0)} = \frac{1}{P_{01}^{P}}$$

***Index uplatnil v roce 1871 E.Laspeyres k analýze cenových relací při zbožních výměnách v Německu. Laspeyresovo indexní číslo je využíváno v české** (stejně jako dříve v československé) **statistické praxi,** zejména **k měření vývoje inflace (CPI - index spotřebitelských cen a PPI – index cen průmyslových výrobců) a indexů životních nákladů** (u různých sociálních kategorií)**.*

Vezmeme-li místo spotřeb komodit $q_i(0)$ spotřeby z běžného období $q_i(1)$, dostaneme

4. PAASCHEho indexní číslo [Hermann von Paasche 1874]

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}$$

Jde o obdobu předchozího s tím, že váhy α_i jsou dány jako $\alpha_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}$

Uplatníme-li tyto váhy ve váženém aritmetickém průměru, dostaneme

$$P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) q_j(1)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(1)} = P^{P}_{\ 01}$$

P_{01}^{P} lze interpretovat jako (vážený) harmonický průměr s vahami $\alpha_i = \dfrac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}$

Index uplatnil poprvé v roce 1874 německý ekonom H. von Paasche při analýze vývoje cenových kursů na hamburské burze. Paascheho indexní číslo je (v současnosti zejména v anglosaské jazykové oblasti a v Japonsku) používáno k charakterizaci vývoje burzovních indexů na kapitálových trzích.

Laspeyres, E. Die Berechnung einer mittleren Warenpreissteigerung. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 16, s.296-314.
Paasche, H. Über der Preisentwicklung der Letzte Jahre nach den Hamburger Börsennotirungen. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 23, s.168-178.

Údajně první ekonom, který uvedl a podpořil postup vedoucí k definicím Paascheho a Laspeyresova indexního čísla byl rovněž v roce 1871 německý ekonom Drobisch. Jeho

Obě tato indexní čísla tvoří určité rozmezí (s dolní hranicí P_{01}^{P} a horní hranicí P_{01}^{L}), v rámci něhož lze považovat posouzení vývoje poměrů sledovaných veličin (cen,kvantit) za realistické. Hodnoty převyšující P_{01}^{L} a hodnoty menší než P_{01}^{P}) za realistické považovat nelze a případný výsledek (získaný jiným indexním číslem) **je třeba posuzovat již jako zřetelné nadhodnocení, resp. podhodnocení skutečného stavu.**

Nevýhodou obou těchto indexních čísel (kromě jiných teroretických nedostatků) je skutečnost, že nezacházejí symetricky s informacemi získanými v základním resp. v běžném období.

Tuto nevýhodu odstraňují jiná indexní čísla, která váží cenové podíly $p_i(1)/p_i(0)$ **vahami,** které se staví k otázce**, zda kvantity brát ze základního nebo běžného období "neutrálně". Jde o**

<u>5.MARSHALL-EDGEWORTHovo indexní číslo</u> [Alfred Marshall, Francis Y.Edgeworth1887]

$$P_{01}^{E} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}$$

V něm jsou váženy jednotlivé cenové poměry aritmetickým průměrem kvantit vzatým ze základního a běžného období. Také toto indexní číslo může být interpretováno jako vážený aritmetický průměr s vahami

$$\alpha^{E}{}_{i} = \frac{p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\left[q_j(0)+q_j(1)\right]}$$

<u>6. WALSHovo indexní číslo</u> [Correa Moylan Walsh 1921]

$$P_{01}^{W} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}} \quad ,$$

ve kterém jsou s kvantity neutrálně průměrovány geometricky. Walsh argumentoval pro tento návrh právě potřebou zacházet „symetricky" s informacemi převzatými ze základního a běžného období, nejsou-li jiná vodítka, kterému z těchto období dát přednost. I toto IČ je speciálním případem váženého aritmetického průměru, pokud za váhy α_i **vezmeme výrazy**

$$\alpha^{W}{}_{i} = \frac{p_i(0)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot\sqrt{q_j(0)\cdot q_j(1)}} \quad ($$

Ve snaze dospět k "optimálnímu" indexnímu konstruktu, byl mj. prezentován návrh známý jako

<u>7. FISHERovo (ideální) indexní číslo</u> [Irving Fisher 1922] $P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L}\cdot P_{01}^{P}}$,

To je definováno jako (prostý) geometrický průměr Laspeyresova a Paascheova indexního čísla. Index je pojmenován po Američanovi Irvingu Fisherovi, ač byl již dříve zmiňován Arthurem L.Bowleyem [1899] **a Arthurem C.Pigouem** [1912]. **Z konstrukce tohoto indexního čísla je zřejmé, že jeho hodnota se musí nacházet mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem.**

Jak se při praktickém uplatnění ukazuje, **hodnoty Fisherova, Edgeworthova a Walshova indexního čísla jsou často velmi blízké a všechna mohou dobře vyjadřovat "neutrální" hodnocení vývoje či územního srovnání stavů posuzovaného komplexu.**

Proti Laspeyresovu a Paascheho indexním číslům operují, jak patrno, **Walshův,**

Edgeworthův a Fisherův index s celou čtveřicí vektorů $\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1), \boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1),$

Další indexní číslo, kterému se dostalo značné teoretické **pozornosti je**

8. <u>TÖRNQUISTovo indexní číslo</u> [Leo Törnquist 1936]

$$P_{01}^{T} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{w_i}$$

kde $w_i = 0{,}5 \cdot \left(\dfrac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \right) + 0{,}5 \cdot \left(\dfrac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)} \right)$,

což je vážený geometrický průměr cenových poměrů $\dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}$**, v němž jsou váhy** w_i **vytvořeny jako prosté průměry výdajových účastí** i**-té kvantity** (na peněžním agregátu) **v základním a v běžném období.**

Konečně ke klasickým indexním číslům můžeme přiřadit ještě dva návrhy, které lze vyjádřit jako vážené aritmetické průměry. Jedná se o

9. <u>PALGRAVEovo indexní číslo</u> [R.H.Inglis Palgrave *kolem* 1910]

$$P_{01}^{PL} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)} . \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [p_i(1)]^2 \cdot q_i(1) / p_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)}$$

10. <u>Harmonický LASPEYRESův index</u> [Yrjö Vartia 1978]

$$\frac{1}{P_{01}^{HL}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(0)}{p_i(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [p_i(0)]^2 \cdot q_i(0) / p_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}$$

Obě tato indexní čísla se vyznačují tím, že se v jejich konstrukci objevují opět váhy v podobě výdajových účastí („*expenditure shares*") mající u Palgraveova indexu tvar

$$\alpha^{PL}{}_i = \frac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)}$$

u harmonického Laspeyresova indexu pak tvar

$$\alpha^{HL}{}_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$$

Törnquist, L.: The Bank of Finland´s .consumption price index. Bank of Finland Monthly Bulletin 10, 1936
Vartia Y: Ideal Log-Change Index Numbers. Scandinavian Journal of Statistics 3/1976

Indexní čísla Laspeyresovo, Paascheho a některá další **lze zařadit do kategorií indexů tzv. Löweova typu. Tato indexní čísla lze vyjádřit ve tvaru**

LÖWEův (cenový) index [Joseph Loewe 1823]

$$P_{01}^{LW} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(*)}$$

kde hvězdičky v závorce vyjadřují situování do nějakého pevného časového období nebo jde prostě o nějakým způsobem stanovené kvantity (u Edgeworthova či Walshova čísla se vezmou průměry kvantit ze základního a běžného období). Obvykle se předpokládá, že období vyjádřené hvězdičkou není dřívější než základní období „*0*“.

Obecnost Löweovy formulace nazývané „přístupem pevného koše“ (*fixed basket approach*) přináší s sebou na druhé straně značný stupeň neurčitosti, máme-li rozhodnout o nejvhodnějším naplnění hvězdiček v závorkách.

Ještě jednomu obecnému tvaru, jímž je možno řadu klasických indexních čísel zapsat**, se dostalo pozornosti. Jde o indexy vyjádřitelné jako „obecná střední hodnota řádu *r* “**

$${}_sP_{01}^{t}(r) = \left(\sum_{i=1}^{N} s_i(t)\cdot\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^r\right)^{1/r} \qquad \textbf{pro } r\neq 0$$

nebo výrazem

$${}_sP_{01}^{t}(0) = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{s_i(t)} \qquad \textbf{limita pro } r\to 0$$

přičemž váhy

$$s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t)q_i(t)}$$

představují *výdajové účasti* (*expenditure shares*) i-té komodity na hodnotě celkového **spotřebního koše. Hodnoty těchto účastí se přebírají zpravidla buď ze základního nebo běžného období. Z uvedených indexních čísel lze za speciální případy *obecné střední hodnoty s vahami charakteru výdajových účastí* vyjádřit**

Laspeyresovo indexní číslo

$$P^{L}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} s_i(0)\frac{p_i(1)}{p_i(0)} =_s P^{0}{}_{01}(1)$$

Paascheho indexní číslo

$$P^{P}{}_{01} = \left(\sum_{i=1}^{N} s_i(1)\frac{p_i(0)}{p_i(1)}\right)^{-1} =_s P^{1}{}_{01}(-1)$$

Palgraveův cenový index

$$P^{PL}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} s_i(1)\frac{p_i(1)}{p_i(0)} =_s P^{1}{}_{01}(1)$$

Harmonický Laspeyresův index $$P^{P}{}_{01} = (\sum_{i=1}^{N} s_i(0)\frac{p_i(0)}{p_i(1)})^{-1} =_s P^{0}{}_{01}(-1)$$

Törnquistův cenový index $$P_{01}^{T} = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{0,5.s_i(0)+0,5.s_i(1)} =_s P^{0+1}{}_{01}(0)$$

isherovo indexní číslo může být zapsáno jako

$$P^{F}{}_{01} = (P^{0}{}_{01}(1))^{1/2}(P^{1}{}_{01}(-1))^{1/2}$$

Podobně bychom mohli nejrůznější volbou vah a průměrů různých typů dospět k mnoha dalším tvarům, které by dohromady vytvořily početný soubor více nebo méně užitečných typů souhrnných indexů. Většina nahodile konstruovaných výrazů ovšem nepřesvědčila z hlediska svých vlastností, popř. i podmínek praktického užití, takže se do teoretického povědomí dostaly jen některé z nich.

Jak rozlišit mezi vhodností a použitelností mnoha možných návrhů navzájem,

Otázka výběru určitého indexu pro konkrétní použití je dosti arbitrární.

Ve 20. století bylo věnováno značné úsilí, jak vypracovat soubor kritérií, podložených zdůvodněnými teoretickými požadavky, které do určité míry dovolují posoudit "kvalitu" toho-kterého návrhu tvaru konkrétního indexního čísla, byť - jak dále uvidíme - nelze aspirovat na stanovení "všestranně nejlepšího" indexního čísla.

Po odmlce trvající několik desítek let od vypracování prvního okruhu těchto testů/axiomů (cca do konce 20.let 20.století) přibylo v posledních 20 letech několik dalších přinejmenším stejně oprávněných kritérií/testů (vděčíme za ně zejména německým ekonomům činných v této a příbuzných oblastech matematické ekonomie). V další části se s nimi postupně seznámíme.

***/ Za jeden z posledních lze pokládat soubor 20 testů/axiomů prezentovaných E.Diewertem v [8] .**